

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE V BIOLOGII II

Milan Kučera

Obsah

I. Modely jedné populace s difúzí

- 1.1 Stabilizační vliv difúze a Dirichletových podmínek – dimenze 1
- 1.2 Stabilizační vliv difúze a Dirichletových podmínek – obecná dimenze
- 1.3 Model obaleče s difúzí – dimenze 1
- 1.4 Model obaleče s difúzí – obecná dimenze
- 1.5 Bifurkace z prostého charakteristického čísla
- 1.6 Převedení okrajové úlohy na operátorovou rovnici, slabá řešení
- 1.7 Lokální bifurkace stacionárních řešení pro populační model
- 1.8 Obecné věty o globální bifurkaci
- 1.9 Globální bifurkace pro populační model v dimenzi 1
- 1.10 Globální bifurkace pro populační model v obecné dimenzi

II. Systémy reakce-difúze

- 2.1 Podmínky pro nestabilitu způsobenou difúzí
- 2.2 Oblast stability a nestability
- 2.3 Tvar vlastních funkcí, řešení linearizovaného systému
- 2.4 Bifurkace stacionárních prostorově nehomogenních řešení
- 2.5 Konkrétní modely

1 Modely jedné populace s difúzí

1.1 Stabilizační vliv difúze a Dirichletových podmínek – dimenze 1

Vrátíme se k modelům jedné populace popsané jedinou rovnicí, ale budeme teď uvažovat i prostorové rozložení hustoty populace a vliv difúze. Pro jednoduchost uvažujme nejprve prostorovou dimenzi jedna a oblastí bude interval $(0, L)$.

Neznámá funkce u proměnných $t \in [0, +\infty)$, $x \in [0, L]$ bude popisovat hustotu populace, tj. $u(t, x)$ je hustota populace v čase t a v bodě x . Vliv difúze na růst populace je popsán členem $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Tedy například logistická rovnice s difúzí má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) \quad \text{na } (0, +\infty) \times (0, L), \quad (1)$$

kde d je koeficient difúze (rychlost difúze), r je koeficient růstu populace, K je kapacita prostředí. Viz [1], kap. 1.

K tomu, aby bylo jednoznačně určeno řešení takové rovnice, je kromě počáteční podmínky, která je tvaru $u(0, x) = u_0(x)$ (u_0 je daná funkce na $[0, L]$), nutno zadat ještě okrajové podmínky v bodech 0 a L . Uvažujme nejprve nulové Dirichletovy okrajové podmínky, tj.

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (2)$$

Úloha (1), (2) má zřejmě triviální stacionární řešení $u \equiv 0$. Zdůrazněme, že další stacionární řešení už snadno nenajdeme. V případě logistické rovnice (obyčejné) bez difúze bylo na první pohled druhým stacionárním řešením $u \equiv K$, které nyní sice splňuje rovnici (1), ale nesplňuje okrajové podmínky (2). Dále uvidíme, že pro některé parametry d netriviální a navíc prostorově nehomogenní (nekonstantní) stacionární řešení existují, ale jejich nalezení není jednoduchá záležitost. Také uvidíme, že difúze spolu s okrajovými podmínkami může ovlivnit stabilitu. Budeme zkoumat obecnější úlohu typu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru + g(u) \quad \text{na } (0, \infty) \times (0, L), \quad (3)$$

kde g je spojitá reálná funkce,

$$g(u) = \mathbf{o}(|u|) \quad \text{pro } |u| \rightarrow 0, \quad (4)$$

(tedy g je člen vyššího řádu). Příklad Dirichletových podmínek (2) porovnáme s případem Neumannových okrajových podmínek

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (5)$$

Mohli bychom ovšem uvažovat i podmínky smíšené, tj. Dirichletovu na jednom a Neumannovu na druhém konci intervalu.

Poznámka 1. Dirichletovy okrajové podmínky odpovídají situaci, kdy hranice oblasti (v tomto případě body $0, L$) jsou pro naši populaci zcela nehostinné – populace má na hranici nulovou hustotu, vymírá tam. Neumannovy okrajové podmínky znamenají, že hranici nelze překročit – tok hranicí je nulový, tj. žádný jedinec nemůže z oblasti odejít ani do ní zvenku přijít.

Budeme v dalším pro zkrácení psát u_t místo $\frac{\partial u}{\partial t}$ a u_x, u_{xx} místo $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ a pod.

Podotkneme, že (díky podmínce (4)) linearizovanou rovnicí k (3) je rovnice

$$u_t = du_{xx} + ru. \quad (6)$$

O stabilitě nulového řešení úlohy (3) s okrajovými podmínkami (2) resp. (5) vypovídají vlastní čísla úlohy

$$du_{xx} + ru = \lambda u \quad (7)$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(L) = 0 \quad (8)$$

resp.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(L) = 0. \quad (9)$$

Uvědomíme si, že tuto úlohu na vlastní čísla jsme dostali z linearizované úlohy stejně jako v případě obyčejných diferenciálních rovnic a také že kritérium stability nulového řešení v následující větě je podobné větě 3.1 z [1]. Rozdíl je v tom, že v případě obyčejných rovnic se jednalo o vlastní čísla matice, kterých bylo jen konečně mnoho, a proto z podmínky $\operatorname{Re} \lambda < 0$ pro všechna vlastní čísla plynulo automaticky $\operatorname{Re} \lambda < -\varepsilon$ pro nějaké $\varepsilon > 0$. Z druhé strany úloha (7) má pouze reálná vlastní čísla (jak se snadno zjistí), proto nemusíme teď mluvit o

Re λ , ale pouze o λ . (V případě obecnějších parciálních rovnic či jejich systémů, kdy existují i komplexní vlastní čísla, jsou ovšem opět podstatné jejich reálné části. Viz též dále.)

Věta 1.1. *Bud' $g(u) = o(|u|)$ pro $|u| \rightarrow 0$. Jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\lambda < -\varepsilon$ pro všechna vlastní čísla λ úlohy (7), (2), resp. (7), (5), pak nulové řešení úlohy (3), (2), resp. (3), (5) je asymptoticky stabilní ve $W^{1,2}$ normě. Jestliže existuje kladné vlastní číslo úlohy (7), (2), resp. (7), (5), pak nulové řešení úlohy (3), (2), resp. (3), (5) je nestabilní.*

Poznámka 2. Je dobře známo a snadno se ověří, že úloha

$$-u_{xx} = \kappa u \text{ na } (0, L) \tag{10}$$

s okrajovými podmínkami (8) má vlastní čísla

$$\kappa_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

s příslušnými vlastními funkcemi

$$e_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Podobně úloha (10), (9) má vlastní čísla

$$\kappa_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

s příslušnými vlastními funkcemi

$$e_n(x) = \cos \frac{n\pi}{L}x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Vypočtěme nyní vlastní čísla úlohy (7), (8). Rovnici (7) můžeme psát ve tvaru

$$-u_{xx} = \frac{r - \lambda}{d}u.$$

Tedy λ je vlastní číslo úlohy (7), (8) právě když $\kappa = \frac{r - \lambda}{d}$ je vlastní číslo úlohy (10), (8). Podle poznámky 2 tedy všechna vlastní čísla úlohy (7), (8) tvoří posloupnost

$$\lambda_n = r - d \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Největší z nich je $\lambda_1 = r - d \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ a to je záporné právě tehdy, když

$$L < L_c := \pi \sqrt{\frac{d}{r}}. \tag{11}$$

Pro $L > L_c$ existuje kladné vlastní číslo úlohy (7), (8).

Analogický výpočet můžeme provést pro případ podmínek (9), tedy úloha (7), (9) má vlastní čísla $\lambda_n = r - d(\frac{n\pi}{L})^2$, $n = 0, 1, 2$. Podstatné je, že nyní sčítáme od nuly, nikoli od jedné (druhá část pozn. 2). Tedy největší vlastní číslo $\lambda_0 = r$ je vždy kladné.

Tedy z věty 1.1 plyne následující tvrzení.

Věta 1.2. *Bud' $g(u) = o(|u|)$ pro $|u| \rightarrow 0$. Pak pro $L < L_c$, kde L_c je zavedeno v (11) (tj. pro intervaly kratší nežli jistá kritická délka) je nulové řešení úlohy (3), (2) asymptoticky stabilní ve $W^{1,2}(0, L)$ normě, pro $L > L_c$ je nulové řešení této úlohy nestabilní. Nulové řešení úlohy (3), (5) je nestabilní vždy.*

Připomeňme, že nulové řešení stejné rovnice bez difúze je nestabilní (viz kap. 1). Tedy difúze spolu s nulovými Dirichletovými okrajovými podmínkami má stabilizační vliv na nulové řešení, pokud délka intervalu je dostatečně malá. To souhlasí s všeobecnou představou, že difúze zhlazuje, ustabilňuje. (Obecně to ale není pravda, jak uvidíme v případě systémů). Zde se však jedná o souhrnu difúze s Dirichletovou okrajovou podmínkou. Difúze zajišťuje pohyb populace z vnitřku oblasti, kde se množí, k hranici, na níž vymírá. Samotná difúze stabilizační vliv v naší úloze nemá, jak je vidět z případu Neumannových okrajových podmínek.

Poznámka 3. Kritická délka intervalu $L_c = \pi\sqrt{\frac{d}{r}}$ závisí zcela přirozeným způsobem na rychlosti difúze d a koeficientu růstu r . Čím větší je rychlost difúze, tím větší může být oblast, aby ještě difúze stačila donést k hranici dostatečné množství populace, která tam vymírá a tím se stabilizuje nulové ekvilibrium. Čím větší je koeficient růstu r , tím menší musí být oblast, aby difúze spolu s Dirichletovými okrajovými podmínkami překonala základní destabilizující vliv logistického členu.

1.2 Stabilizační vliv difúze a Dirichletových podmínek – obecná dimenze

Můžeme uvažovat též analogickou úlohu na omezené oblasti Ω v R^N s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$, tj.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + ru + g(u) \quad (12)$$

na Ω například se smíšenými okrajovými podmínkami

$$u = 0 \text{ na } \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ na } \Gamma_N, \quad (13)$$

kde Γ_D, Γ_N jsou otevřené disjunktní části hranice $\partial\Omega$, $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N = \partial\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ značí derivaci ve směru vnější normály.

Poznámka 4. Vlastní čísla úlohy

$$-\Delta u = \kappa u \text{ na } \Omega \quad (14)$$

s okrajovými podmínkami (13) tvoří v případě $\Gamma_D \neq \emptyset$ nekonečnou posloupnost κ_n , $n = 1, 2, \dots$, $0 < \kappa_1 < \kappa_2 \leq \kappa_3 \leq \dots$, v případě $\Gamma_D = \emptyset$ (tj. $\Gamma_N = \partial\Omega$) má tato úloha kromě kladných vlastních čísel i vlastní číslo nulové $\kappa_0 = 0$, tedy všechna vlastní čísla tvoří posloupnost $\kappa_0 < \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots$

Pro stabilitu triviálního řešení platí analogie věty 1.1, musíme ovšem nahradit úlohu (7), (8) úlohou

$$d\Delta u + ru = \lambda u \quad (15)$$

s okrajovými podmínkami (13). Úplně stejně jako v případě prostorové dimenze jedna zjistíme, že vlastní čísla úlohy (15), (13) jsou

$$\lambda_n = r - d\kappa_n, \quad n = 1, 2, \dots \text{ při } \Gamma_D \neq \emptyset, \quad \text{resp. } n = 0, 1, 2, \dots \text{ při } \Gamma_D = \emptyset.$$

Uvažujme nyní oblast $L\Omega = \{x' \in R^N; x' = Lx, x \in \Omega\}$. Tedy s rostoucím L se oblast zvětšuje při zachování tvaru. Položíme $x' = Lx$ a zavedeme novou funkci $\tilde{u}(x') = u(x)$ pro $x' = Lx$. Dostáváme

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j}(x') = \frac{\partial}{\partial x_j}(u(x'/L)) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \cdot 1/L \quad \text{pro } x' = Lx, \quad x \in \Omega, \quad x' \in L\Omega$$

a dále

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_j^2}(x') = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) \cdot 1/L^2 \quad \text{pro } x' = Lx, \quad x \in \Omega, \quad x' \in L\Omega.$$

Odtud plyne (píšeme-li všude u místo \tilde{u}), že rovnice (12) resp. (14) resp. (15) na oblasti $L\Omega$ s okrajovými podmínkami

$$u = 0 \text{ na } L \cdot \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ na } L \cdot \Gamma_N, \quad (16)$$

jsou po řadě ekvivalentní s rovnicemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{L^2} \Delta u + ru + g(u) \text{ na } \Omega, \quad (17)$$

resp.

$$\frac{d}{L^2} \Delta u + ru = \lambda u \text{ na } \Omega \quad (18)$$

s okrajovými podmínkami (13). Rovnici (18) lze psát jako $-\Delta u = \frac{r-\lambda}{d} L^2 u$ a proto úloha (18), (13) má vlastní čísla $\lambda_n = r - d\frac{\kappa_n}{L^2}$, $n = 1, 2, \dots$ (v případě $\Gamma_D \neq \emptyset$) resp. $n = 0, 1, 2, \dots$ (v případě $\Gamma_D = \emptyset$). Tedy největší vlastní číslo

úlohy (18), (13) je $\lambda_1 = r - d\frac{\kappa_1}{L^2}$ (v případě $\Gamma_D \neq \emptyset$) resp. $\lambda_0 = r$ (v případě $\Gamma_D = \emptyset$). V případě $\Gamma_D \neq \emptyset$ tedy největší vlastní číslo je záporné právě když

$$L < L_c := \sqrt{\frac{d}{r}\kappa_1}.$$

Pro $L > L_c$ má (18), (13) kladné vlastní číslo $\lambda = r$. Zřejmě nulové řešení úlohy (17), (13) na Ω je stabilní právě když nulové řešení úlohy (12), (16) na $L\Omega$ je stabilní. Dospíváme tedy k následujícímu závěru.

Věta 1.3. *Bud' $g(u) = o(|u|)$ pro $|u| \rightarrow 0$. Je-li $\Gamma_D \neq \emptyset$, pak pro $L < L_c$ (tj. pro oblasti tvaru Ω nedosahující jisté kritické velikosti) je nulové řešení úlohy (15) na $L\Omega$, (16) a tedy i nulové řešení úlohy (18), (13) asymptoticky stabilní ve $W^{1,2}(L\Omega)$ resp. $W^{1,2}(\Omega)$ normě, pro $L > L_c = \sqrt{\frac{d}{r}\kappa_1}$ je nulové řešení těchto úloh nestabilní. Je-li $\Gamma_D = \emptyset$, pak nulové řešení je vždy nestabilní.*

Situace je tedy obdobná jako v dimenzi jedna. Rozdíl je ovšem v tom, že vlastní čísla Laplaceova (tj. úlohy (14), (13)) obecně analyticky vypočítat neumíme (s výjimkou speciálních oblastí jako je obdélník, kruh ap.), lze je ovšem vypočítat numericky.

Poznámka 5. Číslo L_c je nejmenší parametr L , pro který úloha (18), (13) má největší vlastní číslo nulové.

Poznámka 6. Uvažujme nyní pro jednoduchost případ $\Gamma_D = \partial\Omega$, $\Gamma_N = \emptyset$ a píšme $\kappa_n(\Omega)$ místo κ_n a pod. pro zvýraznění závislosti vlastních čísel Laplaceova na oblasti. Je známo, že nejmenší vlastní číslo $\kappa_1(\Omega)$ úlohy (14), (13) s $\Gamma_D = \partial\Omega$ je variačně charakterizováno jako

$$\kappa_1(\Omega) = \min_{\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx}{\int_{\Omega} |\varphi|^2 dx} = \inf_{\varphi \in D(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx}{\int_{\Omega} |\varphi|^2 dx}.$$

Odtud ihned plyne, že pro $\Omega_0 \subset \Omega$ je $\kappa_1(\Omega_0) \geq \kappa_1(\Omega)$. Bud' nyní Ω_1 např. čtverec s délkou strany jedna. Pak je $\kappa_1(\Omega_1) = 2\pi^2$. Z věty 1.3 víme, že pro $L < L_c = \sqrt{2\frac{d}{r}}\pi$ je nulové řešení naší úlohy na $L\Omega_1$ stabilní. Ale zároveň pro libovolnou oblast $\Omega_0 \subset L\Omega_1$ je

$$\lambda_1(\Omega_0) = r - d\kappa_1(\Omega_0) \leq r - d\kappa_1(L\Omega_1) = r - d\kappa_1(\Omega_1)/L^2 < 0$$

pro $L < L_c$. Tedy na každé podoblasti $\Omega_0 \subset L\Omega$ s $L < L_c$ a s Dirichletovými podmínkami na hranici populace vymírá.

1.3 Model obaleče s difúzí – dimenze 1

Uvažujme jako příklad model obaleče z kap. 1, ke kterému přidáme difúzní člen. V případě prostorové dimeze 1 máme tedy rovnici

$$u_t = du_{xx} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{bu^2}{a^2 + u^2} \quad \text{na } [0, \infty) \times [0, L]. \quad (19)$$

Doplňme ji Dirichletovými podmínkami (2). Je to speciální případ rovnice (3) s $g(u) = -\frac{r}{K}u^2 - \frac{bu^2}{a^2+u^2}$. Zřejmě je $g(u) = o(|u|)$ pro $|u| \rightarrow 0$. Tedy z věty 1.2 plyne, že nulové řešení je stabilní pro $L < L_c = \pi\sqrt{\frac{d}{r}}$ a nestabilní pro $L > L_c$, tj. v $L = L_c$ dochází ke ztrátě stability.

Připomeňme, že úloha bez difúze má v závislosti na parametrech jedno až tři kladná stacionární řešení (viz [1], kap. 1). Předpokládejme, že r , K , a , b jsou pevná a taková, že zmíněná kladná stacionární řešení jsou tři. Numerické výpočty ukazují, že pak stacionární řešení úlohy (19), (2) lze znázornit následujícím obrázkem (bifurkačním diagramem).

V bodě $L = L_c$ bifurkují (větví se) z nulového řešení nenulová stacionární řešení, která jsou kladná na $(0, L)$, symetrická vzhledem ke středu intervalu $[0, L]$ a nabývají v $\frac{L}{2}$ svého maxima. Na svislé ose je nanášena velikost tohoto maxima, tedy toto maximum se asymptoticky blíží k u_1 pro $L \rightarrow \infty$. Tato řešení jsou stabilní, tedy v bodě L_c dochází nejen ke ztrátě stability nulového řešení (věta 1.2), ale stabilitu zde přebírá nové nenulové bifurkující řešení („exchange of stability“). Toto nové řešení je kvalitativně odlišné – je prostorově nekonstantní (na hranici nulové podle (2), uvnitř $(0, L)$ kladné).

Dále existuje $L_0 > L_c$, ve kterém vzniká jedno další kladné netriviální řešení, které se při dalším růstu parametru L ihned dělí na dvě řešení – větší z nich je stabilní a jeho maximum pro $L \rightarrow +\infty$ se blíží hodnotě u_3 (stacionární stav rovnice bez difúze odpovídající ekologické katastrofě), menší je nestabilní a jeho maximum se blíží u_2 (hodnota, která v případě rovnice bez difúze je hranicí mezi oblastmi atrakce stabilních řešení u_1 a u_3). V dalším ukážeme, že existence bifurkace v bodě L_c je zcela zákonitá dokonce i v případě libovolné prostorové dimenze.

Poznámka 7. Představme si, že koeficient růstu populace r a koeficient difúze d jsou dané a známé. Pak také kritická délka L_c je známá. Předpokládejme, že model popisuje realisticky chování obaleče, který žije například v pásu lesa délky L , na jehož koncích je hustota obaleče nulová (např. díky přirozenému okolí nebo chemickému ošetření) a z nějakého důvodu je přirozené považovat populaci za homogenní vzhledem k šířce pásu (například pás je dostatečně úzký). Pokud je

$L < L_c = \pi\sqrt{\frac{d}{r}}$, pak nulové řešení je stabilní a populace bude k němu konvergovat, tj. bude vymírat. (Máme zde na mysli konvergenci ve $W^{1,2}(0, L)$ -normě, která díky spojitosti vnoření $W^{1,2}(0, L) \subset C([0, L])$ implikuje speciálně stejnoměrnou konvergenci – viz odst. 1.10 dále. Pokud $L > L_c$, má smysl například pás rozdělit na části s délkami menšími než L_c a oddělit je pruhy, ve kterých obaleč nemůže žít – například tyto pruhy budou chemicky ošetřovány tak, že hustota obaleče na nich bude nulová. Pak populace bude všude opět vymírat. Je možno zvolit také strategii využívající toho, že pro $L \in (L_c, L_0)$ existuje jediné stabilní řešení, které má menší maximum, nežli je u_1 – tj. přijatelná (i když kladná) koncentrace škůdce (viz [1], kap. 1). V tomto případě můžeme očekávat, že stačí les rozdělit na pásy délky menší než L_0 a hustota populace se bude blížit s rostoucím časem rozložení ne většímu než u_1 , což je přijatelná situace.

1.4 Model obaleče s difúzí – obecná dimenze

Uvažujeme rovnici

$$u_t = \Delta u + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{bu^2}{a^2 + u^2} \quad \text{na } [0, \infty) \times L\Omega \quad (20)$$

s okrajovými podmínkami (16), kde Ω je pevná oblast, L je parametr (srov. s odst. 1.2). Přímo z věty 1.3 plyne následující tvrzení.

Věta 1.4. *Pro $L < L_c$ (tj. pro oblasti tvaru Ω nedosahující jisté kritické velikosti) je nulové řešení úlohy (18), (13) asymptoticky stabilní ve $W^{1,2}(\Omega)$ normě, pro $L > L_c = \sqrt{\frac{d}{r}}\kappa_1$ je nulové řešení nestabilní. Je-li $\Gamma_D = \emptyset$, pak nulové řešení je vždy nestabilní.*

Podotkněme, že vlastní číslo κ_1 Laplaciánu (závisející na dané oblasti Ω i na Γ_D, Γ_N) lze vypočítat přinejmenším numericky.

Poznámka 8. Bud' O daná oblast. Označme Ω obdélník s délkou strany 1 a buď $L < L_c$. Pak O můžeme pokrýt konečným počtem čtverců Ω_j , $j = 1, \dots, k$ o straně L . Triviální řešení rovnice (20) na každém z těchto čtverců s Dirichletovými podmínkami na celé jeho hranici je stabilní. Podle poznámky 6 je stabilní i triviální řešení rovnice (20) na každé z množin $O \cap \Omega_j$ s Dirichletovými podmínkami na celé její hranici. Tedy na každé z těchto množin opatřené Dirichletovými podmínkami populace vymírá. Rozdělíme-li proto les na oblasti O na podoblasti $O \cap \Omega_j$, na jejichž hranicích budeme udržovat nulovou hustotu škůdce třeba chemickým ošetřením, bude škůdce vymírat na celé ploše O .

Poznámka 9. Uvědomme si, že v případě nulových Dirichletových okrajových podmínek (alespoň na části hranice) hledání stacionárních řešení naší úlohy znamená hledání řešení okrajové úlohy pro obyčejnou (v případě dimenze 1) nebo parciální (v případě vyšší dimenze) diferenciální rovnici. Nulové řešení existuje vždy, ale hledání nenulových řešení už je netriviální záležitost. (Všechna taková řešení jsou už prostorově nekonstantní.) Jejich existenci můžeme dostat např. na základě teorie bifurkací. V případě nulových Neumannových podmínek na celé hranici ovšem všechna prostorově konstantní (i nulová) řešení dostaneme jako řešení algebraické rovnice $ru + g(u) = 0$ stejně jako u obyčejných rovnic. Kromě nich ovšem mohou existovat i prostorově nehomogenní řešení, jejichž hledání opět znamená řešit diferenciální rovnici.

1.5 Bifurkace z prostého charakteristického čísla

Buď H reálný Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a příslušnou normou $\|\cdot\|$, $A : H \rightarrow H$ lineární kompaktní operátor, $N : \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ nelineární spojitý kompaktní operátor splňující podmínku

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{N(\mu, u)}{\|u\|} = 0 \text{ stejnoměrně na kompaktních } \mu\text{-intervalech,} \quad (21)$$

tj. N je v okolí nuly malá kompaktní perturbace. Speciálně tedy platí $N(\mu, 0) = 0$ pro všechna $\mu \in \mathbb{R}$ a rovnice

$$u - \mu Au - N(\mu, u) = 0 \quad (22)$$

má pro všechna $\mu \in \mathbb{R}$ triviální řešení $u = 0$.

Definice 1. Číslo $\mu_0 \in \mathbb{R}$ nazveme bifurkačním bodem rovnice (22), jestliže v každém okolí bodu $(\mu_0, 0)$ v $\mathbb{R} \times H$ existuje netriviální řešení, tj. dvojice $(\mu, u) \in \mathbb{R} \times H$ splňující (22), $u \neq 0$. Číslo $\mu_0 \in \mathbb{R}$ nazveme charakteristickým číslem operátoru A , jestliže existuje nenulový prvek $u_0 \in H$ (charakteristický nebo vlastní vektor) takový, že $u_0 = \mu_0 Au_0$.

Lemma 1.5. *Je-li A kompaktní lineární operátor v Hilbertově prostoru a spojitý kompaktní operátor N splňuje (21), pak každý bifurkační bod úlohy (22) je charakteristickým číslem operátoru A . Je-li $\mu_n \rightarrow \mu_0$, $\|u_n\| \rightarrow 0$, μ_n, u_n splňují (22), $\frac{u_n}{\|u_n\|} \rightharpoonup w$ (slabá konvergence), pak $\frac{u_n}{\|u_n\|} \rightarrow w$ i silně a w je charakteristický vektor příslušný charakteristickému číslu μ_0 .*

Lemma 1.5 mj. říká, že netriviální řešení bifurkují ve směrech charakteristických vektorů.

Důkaz Je-li $w_n := \frac{u_n}{\|u_n\|} \rightharpoonup w$, pak z kompaktnosti lineárního operátoru A plyne $Aw_n \rightarrow Aw$ silně. Z rovnice (22) s $\mu = \mu_n$, $u = u_n$ po vydělení $\|u_n\|$ dostaneme s použitím předpokladu (21), že w_n konvergují silně v H a $w = \mu_0 Aw$, tedy w je charakteristický vektor příslušný charakteristickému číslu μ_0 .

Poznámka 10. Bud' μ_0 charakteristické číslo operátoru A . Násobností (algebraickou) charakteristického čísla μ_0 nazýváme dimenzi podprostoru $\bigcup_{k=1}^{\infty} \ker(I - \mu_0 A)^k$. (Násobnost charakteristického čísla může být větší než jeho „geometrická násobnost“, tj. dimenze podprostoru $\ker(I - \mu_0 A)$). Charakteristické číslo μ_0 nazýváme prosté, jestliže jeho násobnost je rovna jedné. Je známo, že μ_0 je prosté právě tehdy, když $\dim \ker(I - \mu_0 A) = 1$ a přitom $\langle u_0, u_0^* \rangle \neq 0$, kde u_0^* je vlastní vektor adjungovaného operátoru A^* . Pokud je operátor A symetrický (tedy samoadjungovaný), pak ovšem $u_0^* = u_0$ a poslední podmínka je automaticky splněna.

Věta 1.6. (viz např. [3]) *Jestliže μ_0 je prosté charakteristické číslo kompaktního lineárního operátoru A a spojitý kompaktní operátor N splňuje (21), pak μ_0 je bifurkační bod rovnice (22).*

Poznámka 11. Jsou-li splněny předpoklady věty 1.6 a zobrazení N je navíc třídy C^k , $k \geq 2$ (tj. k -krát spojitě diferencovatelné ve smyslu Frechetově, viz např. [3]), pak existují $\varepsilon_0 > 0$ a C^{k-1} -zobrazení $\tilde{\mu} : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{u} : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow H$ taková, že $\tilde{\mu}(0) = \mu_0$, $\tilde{u}(0) = 0$, $\tilde{\mu}(\varepsilon)$, $\tilde{u}(\varepsilon)$ splňují (22) pro každé $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ a naopak, jestliže (μ, u) splňuje (22), přičemž $|\mu - \mu_0|$ a $\|u\| > 0$ jsou dostatečně malá, pak $\mu = \tilde{\mu}(\varepsilon)$, $u = \tilde{u}(\varepsilon)$ pro nějaké $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Navíc platí $\tilde{u}(\varepsilon) = \varepsilon(u_0 + \tilde{w}(\varepsilon))$, kde $\tilde{w}(0) = 0$, $\tilde{w} : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow H$ je C^{k-1} -zobrazení, u_0 je vlastní vektor operátoru A příslušný μ_0 . Tedy v případě hladkých zobrazení tvoří bifurkující řešení dvě hladké „polovětve“, bifurkující v $\mu = \mu_0$ z nulového řešení ve směrech $+u_0$ a $-u_0$.

1.6 Převedení okrajové úlohy na operátorovou rovnici, slabá řešení

Vrátíme se nyní k otázce existence stacionárních řešení okrajové úlohy (3), (2). Hledáme tedy řešení rovnice

$$du_{xx} + ru + g(u) = 0 \quad \text{na } (0, L) \quad (23)$$

s okrajovými podmínkami (8). Víme už, že pokud d, r jsou dané a jediný parametr je L , dochází v $L = L_c$ ke ztrátě stability nulového řešení úlohy (3), (2) a numerické výpočty ve speciálních případech ukazují, že v L_c dochází k bifurkaci stacionárních řešení. Dokážeme tuto skutečnost na základě věty 1.6. Především převedeme naši rovnici na intervalu $(0, L)$ závislém na parametru na rovnici na intervalu $(0, 1)$, přičemž parametr L se přemístí do rovnice samé. Dále pomocí slabých řešení pak tuto rovnici převedeme na operátorovou rovnici typu (22) ve vhodném Sobolevově prostoru.

Stejně jako v odst. 1.2 snadno zjistíme substitucí $y = x/L$ a zavedením nové funkce

$$v(y) = u(Ly) \text{ pro } y \in (0, 1), \quad (24)$$

že úloha (23), (8) je ekvivalentní s úlohou

$$\frac{d}{L^2}v_{yy} + rv + g(v) = 0 \quad \text{na } (0, 1), \quad (25)$$

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (26)$$

Položme $\mu = \frac{r}{d}L^2$ a pišme poslední rovnici ve tvaru

$$v_{yy} + \mu v + \frac{\mu}{r}g(v) = 0 \quad \text{na } (0, 1). \quad (27)$$

Zavedeme nyní slabé řešení úlohy (27), (26). Položme $H = W_0^{1,2}(0, 1)$ (podprostor Sobolevova prostoru obsahující funkce s nulovými hodnotami na hranici intervalu $(0, 1)$). Je to Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u_x v_x dx$$

a příslušnou normou $\|\cdot\|$, která je na $W_0^{1,2}(0, 1)$ ekvivalentní s klasickou $W^{1,2}(0, 1)$ normou (podrobněji viz [?]). Slabé řešení úlohy (27), (26) je funkce $v \in H$ taková, že

$$\int_0^1 v_x \varphi_x - \mu v \varphi - \frac{\mu}{r}g(v)\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in H. \quad (28)$$

Definujme operátory $A : H \rightarrow H$ a $N : \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ předpisem

$$\langle Av, \varphi \rangle = \int_0^1 v \varphi dy \quad \forall v, \varphi \in H, \quad (29)$$

$$\langle N(\mu, v), \varphi \rangle = \frac{\mu}{r} \int_0^1 g(v) \varphi \, dy \quad \forall v, \varphi \in H, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Integrál v (29) je konečný pro každé $v, \varphi \in H$ a pro pevné v definuje spojitý lineární funkcionál (v proměnné φ) na H . Ten lze podle Rieszovy věty reprezentovat jediným prvkem (který značíme Av) tak, že platí (29). Takto je definován lineární operátor A . Ten je navíc kompaktní, neboť je-li $u_n \rightharpoonup u$ v H (slabá konvergence), pak z kompaktnosti vnoření $W^{1,2}(0, 1) \subset C([0, 1])$ plyne $u_n \rightarrow u$ v $C([0, 1])$, tedy

$$\|Au_n - Au\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \int_0^1 (u_n - u) \varphi \, dx \leq C \int_0^1 |u_n - u| \, dx \rightarrow 0.$$

Operátor N je též korektně definován. Pro $v \in H$ je totiž $g(v) \in C([0, 1])$ (opět vnoření $W^{1,2}(0, 1) \subset C([0, 1])$), tedy speciálně integrál v (30) je konečný pro každé $\varphi \in H$ a definuje spojitý lineární funkcionál (v proměnné φ) na H . Ten lze podle Rieszovy věty reprezentovat jediným prvkem (který značíme $N(\mu, v)$) tak, že platí rovnost v (29). Kompaktnost ověříme podobně jako u operátoru A – pokud $\mu_n \rightarrow \mu$, $u_n \rightharpoonup u$ v H , pak $u_n \rightarrow u$ v $C([0, 1])$, tedy $g(u_n) \rightarrow g(u)$ v $C([0, 1])$. Odtud

$$\begin{aligned} \|N(\mu_n, u_n) - N(\mu, u)\| &= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \int_0^1 \left(\frac{\mu_n}{r} g(u_n) - \frac{\mu}{r} g(u) \right) \varphi \, dx \\ &\leq C \int_0^1 \left| \frac{\mu_n}{r} g(u_n) - \frac{\mu}{r} g(u) \right| \, dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pokud $g(\xi) = \mathbf{o}(|\xi|)$ pro $|\xi| \rightarrow 0$, lze ověřit i podmínku (21) (podrobně viz poznámka 12 níže).

Z definice skalárního součinu a operátorů A, N je ihned vidět, že funkce $v \in H$ je slabé řešení okrajové úlohy (27), (26) právě tehdy, když

$$\langle v - \mu Av - N(\mu, v), \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in H,$$

což je ale ekvivalentní s operátorovou rovnicí (22) v prostoru H .

Poznámka 12. Jestliže $g(\xi) = \mathbf{o}(|\xi|)$ pro $|\xi| \rightarrow 0$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\frac{|g(s)|}{|s|} < \varepsilon$ pro všechna $|s| < \delta$. Je-li $\|u\| < \delta$, pak ze

spojitosti vnoření $W_0^{1,2}(0,1) \subset C([0,1])$ plyne $\max_{x \in [0,1]} |u(x)| \leq C\|u\|$ a tedy pro $\|u\| < \frac{\delta}{C}$ dostáváme $\|u\|_{C([0,1])} \leq \delta$ a

$$\begin{aligned} \frac{\|N(\mu, u)\|}{\|u\|} &= \max_{\|\varphi\| \leq 1} \int_0^1 \frac{\mu}{r} \frac{g(u(x))}{\|u\|} \varphi(x) \, dx \leq \\ &\leq C \int_{\{x: u(x) \neq 0\}} \frac{\mu}{r} \frac{|g(u(x))|}{|u(x)|} \frac{|u(x)|}{\|u\|} \, dx \leq \frac{\mu}{r} C^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Ale $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, tedy platí (21).

Poznámka 13. Je-li v klasické řešení naší okrajové úlohy, pak je to také její slabé řešení. K tomu stačí rovnici (27) vynásobit libovolnou testovací funkcí φ z H , integrovat přes interval $(0,1)$ a užít integraci per partes. V našem jednoduchém případě snadno ověříme i opačnou implikaci – každé slabé řešení je i řešením klasickým. To však zdaleka neplatí vždy (podrobněji viz např [?]).

Poznámka 14. Rovnice

$$v = \mu Av$$

je slabou formulací úlohy na vlastní čísla

$$\begin{aligned} -v'' &= \mu v \\ v(0) &= v(1) = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Číslo μ je charakteristické číslo operátoru A a nenulový prvek v je příslušný vlastní vektor právě tehdy, když μ je vlastní číslo úlohy (31) a v je příslušná vlastní funkce (v tom případě ovšem je $v \in C^2([0,1])$, nejen $v \in H$ - viz pozn. 13). Úloha (31) má vlastní čísla

$$\kappa_n = (n\pi)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

a příslušné vlastní funkce jsou $\sin n\pi x$, to jsou tedy zároveň všechna charakteristická čísla a vlastní vektory operátoru A . Každému vlastnímu číslu κ_n úlohy (31) tedy přísluší (až na násobek) jediná vlastní funkce $\sin n\pi x$. Tedy také $\dim \ker(I - \mu_n A) = 1$, $\ker(I - \mu_n A) = \text{span}\{\sin n\pi x\}$. Operátor A je symetrický (platí $\langle Au, v \rangle = \langle Av, u \rangle$), tedy $A^* = A$ má stejné vlastní vektory. Z poznámky 10 plyne, že všechna charakteristická čísla operátoru A jsou (algebraicky) prostá, neboť je vždy automaticky splněna podmínka $\langle u_0, u_0^* \rangle = \langle u_0, u_0 \rangle \neq 0$.

1.7 Lokální bifurkace stacionárních řešení pro populační model

Vraťme se k původní úloze (23), (8) s parametrem L . Její slabé řešení (pro dané L) definujeme podobně jako v případě úlohy (27), (25), tj. jako funkci $u \in W_0^{1,2}(0, L)$ takovou, že

$$\int_0^L du_x \varphi_x - ru\varphi - g(u)\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(0, L).$$

Protože prostor se mění s parametrem, nemůžeme bifurkační bod definovat stejně jako v definici 1.5 (pro definici bifurkačního bodu bylo podstatné vědět, co je okolí bifurkačního bodu, a to neumíme v případě měnícího se prostoru přímo definovat). Nazveme proto parametr $\tilde{L} > 0$ bifurkačním bodem úlohy (23), (8), jestliže \tilde{L} je bifurkačním bodem rovnice (22) s výše zavedenými operátory A , N , což je slabá formulace úlohy (25), (26). Tedy $\tilde{L} > 0$ je bifurkačním bodem úlohy (23), (8), jestliže ke každému okolí bodu $(\tilde{L}, 0)$ v $\mathbb{R} \times W_0^{1,2}(0, 1)$ existuje $(L, v) \in \mathbb{R} \times W_0^{1,2}(0, 1)$, $v \neq 0$, v je slabé řešení úlohy (25), (26). Dvojice $(\mu, v) \in \mathbb{R} \times W_0^{1,2}(0, 1)$ splňuje rovnici (22) s našimi speciálními operátory A , N , tj. v je slabé řešení úlohy (27), (26) právě tehdy, když u přiřazené v vztahem (24) je slabé (a podle poznámky 13 zároveň klasické) řešení úlohy (23), (8) s $L = \sqrt{\mu \frac{d}{r}}$. Podle věty 1.6 a poznámky 14 je každý bod $\mu_n = (n\pi)^2$ bifurkační bod rovnice (22) a tedy každé $L_n = \pi n \sqrt{\frac{d}{r}}$ je bifurkační bod původní úlohy (23), (8).

Lze ukázat, že pokud g je k -krát spojitě diferencovatelná, pak též operátor N je k -krát Frechetovsky spojitě diferencovatelný. Tedy podle poznámky 11 v okolí bodu $(\mu_n, 0)$, $\mu_n = (n\pi)^2$, jsou netriviální řešení úlohy (27), (26) typu

$$\tilde{v}_n(\varepsilon) = \varepsilon(v_n + \tilde{w}_n(\varepsilon)),$$

kde $\tilde{w}_n(0) = 0$, $\tilde{v}_n, \tilde{w}_n : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow W_0^{1,2}(0, 1)$ jsou hladká zobrazení, $v_n(y) = \sin n\pi y$. Tedy netriviální řešení úlohy (23), (8) v okolí bodu $(L_n, 0)$ jsou typu

$$\tilde{u}_n(\varepsilon) = \varepsilon(u_n + \tilde{z}_n(\varepsilon)), \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),$$

kde $\tilde{z}_n(0) = 0$, $u_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x$. Pro ε malé, tj. blízko bifurkačního bodu, mají tato řešení charakter funkce $\sin \frac{n\pi}{L} x$. Tedy pro $n = 1$ nemění na $(0, L)$ znaménko (jsou kladná pro $\varepsilon > 0$, záporná pro $\varepsilon < 0$), zatímco pro $n > 1$ znaménko mění. Nás zajímají z hlediska popisu hustoty populace pouze nezáporná řešení, tj. jediný pro nás zajímavý je bifurkační bod $L_1 = L_c = \pi \sqrt{\frac{d}{r}}$ a jediná zajímavá řešení leží na „kladné polovětvi“ $\tilde{u}_1(\varepsilon) = \varepsilon(u_1 + \tilde{z}_1(\varepsilon))$.

1.8 Obecné věty o globální bifurkaci

Zformulujeme zde dva známé obecné výsledky, které lze užít pro zkoumání množiny řešení okrajových úloh.

Operátor N v sekci 1.5 nemusel být ve skutečnosti definován na celém $\mathbb{R} \times H$, ale jen na okolí bodu $[\mu_0, 0]$. Někdy tato skutečnost může být důležitá, např. operátor N může na parametru záviset tak, že jej nelze dodefinovat pro $\mu = 0$. V dalším bude O daná otevřená množina v $\mathbb{R} \times H$, kde H je Hilbertův prostor. Operátory A, N budou jako v sekci 1.5, jen N bude v následující větě definován pouze na O .

Označme C uzávěr množiny netriviálních řešení úlohy (22), tj.

$$C = \overline{\{[\mu, u] \in O; [\mu, u], \text{ splňuje (22), } u \neq 0\}}.$$

Přímo z definice bifurkačního bodu plyne, že μ_0 je bifurkační bod právě když $[\mu_0, 0] \in C$.

Věta 1.7. (*P. H. Rabinowitz [15]*) *Bud' μ_0 charakteristické číslo kompaktního lineárního operátoru A , které má lichou násobnost. Bud' O otevřená množina v $\mathbb{R} \times H$, $N : O \rightarrow H$ spojitý kompaktní operátor splňující (21). Pak μ_0 je bifurkační bod rovnice (22). Navíc bifurkace v bodě μ_0 je globální v tom smyslu, že komponenta C_0 množiny C obsahující bod $[\mu_0, 0]$ splňuje alespoň jednu z následujících podmínek.*

- (a) *Existuje $\hat{\mu} \neq \mu_0$ takové, že $[\hat{\mu}, 0] \in C_0$.*
- (b) *Existuje posloupnost $[\mu_n, u_n] \in C_0$ taková, že $[\mu_n, u_n] \rightarrow \partial O$ nebo $\|u_n\| + |\mu_n| \rightarrow \infty$.*

Poznamenejme, že podmínka (a) znamená, že větev C_0 se vrací do nulového u v nějakém charakteristickém čísle různém od μ_0 (viz lemma 1.5). Podmínka (b) obecně znamená, že množina C_0 není kompaktní, v případě $O = \mathbb{R} \times H$ znamená, že C_0 je neomezená.

Je-li charakteristické číslo ve větě 1.7 dokonce prosté, tj. má násobnost 1, tedy speciálně existuje až na násobek jediný vlastní vektor u_0 , pak komponenta C_0 ze zmíněné věty se skládá ze dvou polovětvi C_0^+ a C_0^- bifurkujících ve směru u_0 a $-u_0$. Vysvětleme to přesněji. Zvolme libovolné pevné $\eta \in (0, 1)$ a označme

$$K_\eta^+ = \{[\mu, u]; \langle \frac{u}{\|u\|}, u_0 \rangle > \eta\}, K_\eta^- = \{[\mu, u]; \langle \frac{u}{\|u\|}, u_0 \rangle < -\eta\}$$

a $B_r(\mu_0, 0) = \{[\mu, u] \in \mathbb{R} \times H; |\mu - \mu_0| + \|u\| < r\}$. (Z druhé části lemmatu 1.5 snadno plyne, že $C_0 \cap B_r(\mu_0, 0) \subset (K_\eta^+ \cup K_\eta^- \cup \{[\mu_0, 0]\})$.) Existují souvislé množiny C_0^+ a C_0^- s následujícími vlastnostmi:

$$\begin{aligned}
C_0 &= C_0^+ \cup C_0^-, \quad C_0^+ \cap C_0^- \cap B_r(\mu_0, 0) = \{[\mu_0, 0]\}, \\
C_0^+ \cap K_\eta^+ \cap \partial B_r(\mu_0, 0) &\neq 0, \quad C_0^- \cap K_\eta^- \cap \partial B_r(\mu_0, 0) \neq 0 \quad (32) \\
&\text{pro všechna dostatečně malá } r > 0.
\end{aligned}$$

Speciálně odtud a z druhé části lemmatu 1.5 plyne, že C_0^+ resp. C_0^- obsahuje posloupnost $[\mu_n, u_n] \rightarrow [\mu_0, 0]$ takovou, že $\frac{u_n}{\|u_n\|} \rightarrow u_0$ resp. $\frac{u_n}{\|u_n\|} \rightarrow -u_0$. Podrobně např. viz [3].

V další větě budeme uvažovat jen případ $O = \mathbb{R} \times H$.

Věta 1.8. (*E. N. Dancer [16]*) *Bud' μ_0 prosté charakteristické číslo kompaktního lineárního operátoru A a bud' $N : \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ spojitý kompaktní operátor splňující (21). Pokud $C_0^+ \cap C_0^-$ obsahuje pouze bod $[\mu_0, 0]$, pak C_0^+ i C_0^- jsou neomezené.*

1.9 Globální bifurkace pro populační model v dimenzi 1

Budeme nyní zkoumat existenci a rozložení netriviálních stacionárních řešení úlohy (25), (26) a použijeme k tomu globální bifurkační větu 1.8 z předcházejícího odstavce. Pro jednoduchost se omezíme na případ dimenze 1.

K tomu, aby větve řešení z Rabinowitzovy nebo Dancerovy věty nemohla být neomezená jen v argumentu u a musela být neomezená v μ (resp. v L), budeme předpokládat, že existují $\delta > 0$, $c > 0$ taková, že

$$g(\xi) \leq -c|\xi|^{1+\delta} \text{ pro všechna } \xi > 0. \quad (33)$$

Funkce typu $g(\xi) = -r\xi^2$ z logistické rovnice i $g(\xi) = -r\xi^2 - \frac{\xi^2}{1+\xi^2}$ z modelu obaleče tento předpoklad ovšem splňují s $\delta = 1$.

V dalším bude $L_c = \pi\sqrt{\frac{d}{r}}$ vždy značit hodnotu, ve které dochází ke ztrátě stability triviálního řešení úlohy (3), (2) (odst. 1.1).

Věta 1.9. *Předpokládejme, že spojitá funkce $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje (33) a $g(\xi) = o(|\xi|)$ pro $|\xi| \rightarrow 0$. Pak pro každé $L > L_c$ existuje alespoň jedno kladné (na $(0, 1)$) řešení úlohy (25), (26) a pro žádné $L \leq L_c$ kladné řešení neexistuje. Přesněji, označíme-li S_0^+ komponentu množiny*

$$S^+ = \overline{\{[L, u] \in (0, \infty) \times W_0^{1,2}(0, 1); [L, u] \text{ splňuje (25), (26), } u > 0 \text{ na } (0, 1)\}},$$

obsahující bod $[L_c, 0]$, pak

$$\text{ke každému } L > L_c \text{ existuje } u > 0 \text{ na } (0, 1) \text{ takové, že } [L, u] \in S_0^+, \quad (34)$$

$$\text{pro každé } [L, u] \in S_0^+, [L, u] \neq [L_c, 0] \text{ je } u > 0 \text{ na } (0, 1), L > L_c. \quad (35)$$

Věta 1.9 speciálně říká, že L_c je bifurkační bod a z něho vycházející větev je neomezená v parametru L .

Poznámka 15. Je-li H Hilbertův prostor, $A : H \rightarrow H$ lineární kompaktní a symetrický operátor, pak má A nekonečnou posloupnost vlastních čísel, přičemž největší vlastní číslo je

$$\lambda_{max} = \max_{u \in H, u \neq 0} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|^2} = \max_{u \in H, \|u\|=1} \langle Au, u \rangle. \quad (36)$$

Z poznámky 14 tedy plyne, že v případě našeho operátoru A z (29) je $\mu_0 := \kappa_1 = \frac{1}{\lambda_{max}}$ nejmenší charakteristické číslo operátoru A a zároveň nejmenší vlastní číslo úlohy (31).

Lemma 1.10. *Pokud funkce $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje podmínku $g(\xi) < 0$ pro každé $\xi > 0$ a u je nezáporné netriviální řešení úlohy (8), (26) pro nějaké L , pak $L > L_c$.*

Pokud $g(\xi) < 0$ pro každé $\xi > 0$, $g(\xi) > 0$ pro každé $\xi < 0$ a u je dokonce jakékoli netriviální řešení úlohy (8), (26) pro nějaké L , pak $L > L_c$.

Podotkněme, že v případě logistické rovnice nebo modelu obaleče je splněn pouze znaménkový předpoklad z první, nikoli druhé části lemmatu. V obou těchto případech se dá ukázat, že existují záporná řešení s $L < L_c$ bifurkující z L_c . (Transkritická bifurkace - jedna polovětev bifurkuje doprava, druhá doleva.) Oba předpoklady z druhé části lemmatu jsou splněny např. pro funkce typu $g(\xi) = -\xi^3$.

Důkaz: Volbou testovací funkce $\varphi = u$ v definici slabého řešení (srov. s (28)) dostaneme

$$\frac{d}{L^2} \int_0^1 |u_x|^2 dx = \int_0^1 (ru^2 + g(u)u) dx.$$

Vydělíme-li poslední rovnost $\|u\|^2$, dostaneme s pomocí znaménkových předpokladů a poznámky 15

$$\frac{d}{L^2} = \int_0^1 \left(r \frac{u^2}{\|u\|^2} + \frac{g(u)u}{\|u\|^2} \right) dx < \int_0^1 r \frac{u^2}{\|u\|^2} dx \leq \max_{\|\varphi\|=1} \int_0^1 r \varphi^2 dx = r \lambda_{max} = \frac{d}{L_c^2}.$$

Tedy $L > L_c$. □

Lemma 1.11. *Bud' C_0^+ resp. C_0^- větev netriviálních řešení rovnice (22) v prostoru $H = W_0^{1,2}$ s operátory z (29), (30), bifurkující v $\mu_0 := \kappa_1 (= \frac{r}{d} L_c^2)$ ve směru u_0 resp. $-u_0$ z Dancerovy věty 1.8. Pak*

$$\begin{aligned} u &> 0 \text{ na } (0, 1) \text{ pro všechna } [\mu, u] \in C_0^+ \text{ s } u \not\equiv 0, \\ u &< 0 \text{ na } (0, 1) \text{ pro všechna } [\mu, u] \in C_0^- \text{ s } u \not\equiv 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Důkaz: Nejdříve ukážeme, že existuje $r > 0$ takové, že

$$u > 0 \text{ na } (0, 1) \text{ pro všechna } [\mu, u] \in C_0^+ \cap B_r(\mu_0, 0) \cap K_\eta^+ \text{ s } u \not\equiv 0. \quad (38)$$

Jinak by z vlastností (32) množiny C_0^+ a lemmatu 1.5 plynula existence posloupností $[\mu_n, u_n] \in C_0^+$ a $x_n \in (0, 1)$ takových, že $[\mu_n, u_n] \rightarrow [\mu_0, 0]$, $\|u_n\| \neq 0$, $\frac{u_n}{\|u_n\|} \rightarrow u_0$ a $u_n(x_n) = 0$, $x_n \rightarrow x_0$. Máme $u_0 > 0$ na $(0, 1)$ a protože $\frac{u_n}{\|u_n\|} \rightarrow u_0$ stejnoměrně na $[0, 1]$ díky spojitosti vnoření H do $C([0, 1])$, musí být $x_0 = 0$ nebo $x_0 = 1$. Uvažujme první případ, druhý vede ke sporu analogicky. Vzhledem k tomu, že $\frac{g(u_n)}{\|u_n\|} \rightarrow 0$ stejnoměrně na $[0, 1]$ díky předpokladu $g(u) = \mathbf{o}(|u|)$ pro $|u| \rightarrow 0$, dostaneme vyjádřením z rovnice, že $\frac{u_n''}{\|u_n\|} \rightarrow u_0''$ a odtud $\frac{u_n'}{\|u_n\|} \rightarrow u_0'$ stejnoměrně na $[0, 1]$. Podrobněji viz pozn. 16. Podle věty o střední hodnotě existují $\bar{x}_n \in (0, x_n)$ taková, že $0 = \frac{u_n(x_n) - u(0)}{x_n \|u_n\|} = \frac{u_n'(\bar{x}_n)}{\|u_n\|} \rightarrow u_0'(0)$. Máme ale $u_0'(0) \neq 0$, což je spor a existence dost malého $r > 0$ splňujícího (38) je dokázána. Kdyby neplatilo celé tvrzení (37), pak by odtud plynula existence posloupnosti $[\mu_n, u_n] \in C_0^+$ takové, že $u_n > 0$ na $(0, 1)$, $[\mu_n, u_n] \rightarrow [\tilde{\mu}, u]$, přičemž buď

$$u \not\equiv 0, \quad u(x_0) = 0 \text{ pro nějaké } x_0 \in (0, 1), \quad (39)$$

nebo

$$u \equiv 0, \quad \tilde{\mu} \neq \mu_0. \quad (40)$$

V případě (39) z nezápornosti u plyne i $u'(x_0) = 0$. Úloha má ale triviální řešení a z jednoznačnosti řešení procházejícího daným bodem a splňujícím $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ by plynulo $u \equiv 0$, což by byl spor. V případě (40) by byl $\tilde{\mu}$ bifurkační bod a podle lemmatu 1.5 též charakteristické číslo operátoru A , tedy $\tilde{\mu} = \kappa_n$ pro nějaké $n > 1$ (viz pozn. 14). Měli bychom přitom $\frac{u_n}{\|u_n\|} \rightarrow e_n \geq 0$ (charakteristická funkce úlohy (10), (8) odpovídající κ_n). Ale $e_n(x) = \sin n\pi x$ pro $n > 1$ mění znaménko, opět spor. Tedy první tvrzení v (37) je dokázáno. Druhé tvrzení bychom ovšem dokázali analogicky. □

Důkaz věty 1.9: Označme

$$S_0^+ = \{[L, u]; L = \sqrt{\frac{d}{r}}\mu, [\mu, u] \in C_0^+\}, \quad S_0^- = \{[L, u]; L = \sqrt{\frac{d}{r}}\mu, [\mu, u] \in C_0^-\},$$

kde C_0^+ resp. C_0^- je větev netriviálních řešení rovnice (22) v prostoru $H = W_0^{1,2}$ s operátory z (29), (30), bifurkující v $\mu_0 := \kappa_1 (= \frac{r}{d}L_c^2)$ ve směru u_0 resp. $-u_0$ z Dancerovy věty 1.8. Ukážeme, že S_0^+ má všechny vlastnosti z našeho tvrzení. Z lemmatu 1.11 plyne, že $C_0^+ \cap C_0^-$ obsahuje pouze bod $[\mu_0, 0]$. Podle Dancerovy věty 1.8 jsou tedy množiny C_0^+ , C_0^- a tedy i S_0^+ , S_0^- neomezené. Zřejmě S_0^+ je souvislá část množiny S^+ ze znění věty. Ukážeme, že S_0^+ musí být neomezená

v argumentu L . V opačném případě by existovala posloupnost $[L_n, u_n] \in S_0^+$ taková, že $L_c < L_n < C$ (s nějakým $C > 0$) a $\|u_n\| \rightarrow \infty$ (viz též lemma 1.10). Volbou $\varphi = u_n$ v definici slabého řešení dostáváme díky předpokladu (33) a již dokázané podmínce (1.10)

$$0 = \int_0^1 \frac{d}{L_n^2} |(u_n)_x|^2 - ru_n^2 - g(u_n)u_n dx \geq \int_0^1 \frac{d}{C^2} |(u_n)_x|^2 - ru_n^2 + c_1 u_n^{2+\delta} dx. \quad (41)$$

Integrál z prvního výrazu konverguje k nekonečnu podle předpokladu, poslední je nezáporný a tedy musí být $\int_0^1 ru_n^2 dx \rightarrow \infty$. Ale ze spojitosti vnoření $L_{2+\delta}$ do L_2 dostaneme

$$\int_0^1 u_n^2 dx \leq c_3 \left(\int_0^1 u_n^{2+\delta} dx \right)^{\frac{2}{2+\delta}},$$

tedy

$$-r \int_0^1 u_n^2 dx + c_1 \int_0^1 u_n^{2+\delta} dx \geq -rc_3 \left(\int_0^1 u_n^{2+\delta} dx \right)^{\frac{2}{2+\delta}} + c_1 \int_0^1 u_n^{2+\delta} dx \rightarrow \infty.$$

Tedy celý poslední integrál v (41) konverguje k nekonečnu pro $n \rightarrow \infty$. To je spor a důkaz věty je dokončen.

Poznámka 16. Máme $u_n \rightarrow 0$, $\frac{u_n}{\|u_n\|} \rightarrow u_0$ stejnoměrně. Pro x taková, že $u_n(x) \neq 0$ je $\frac{g(u_n(x))}{\|u_n\|} = \frac{g(u_n(x))}{u_n(x)} \frac{u_n(x)}{\|u_n\|}$. Proto z předpokladu $g(\xi) = \mathbf{o}(|\xi|)$ pro $|\xi| \rightarrow 0$ plyne $\frac{g(u_n)}{\|u_n\|} \rightarrow 0$ stejnoměrně. Slabá řešení u_n jsou v uvažovaném případě i řešení klasická (pozn. 13), tedy $u_n'' = -\mu_n u_n - \frac{\mu_n}{r} g(u_n)$. Po vydělení $\|u_n\|$ dostáváme, že posloupnost $\frac{u_n''}{\|u_n\|}$ je konvergentní v L_2 , tedy $\frac{u_n}{\|u_n\|}$ je Cauchyovská a tedy konvergentní ve $W^{2,2}(0,1)$. Přitom $\frac{u_n}{\|u_n\|} \rightarrow u_0$ ve $W^{1,2}(0,1)$ a tedy musí být $\frac{u_n}{\|u_n\|} \rightarrow u_0$ ve $W^{2,2}(0,1)$. Ze spojitosti vnoření $W^{2,2}(0,1)$ do $C^1([0,1])$ plyne $\frac{u_n}{\|u_n\|} \rightarrow u_0$ v $C^1([0,1])$.

1.10 Globální bifurkace pro populační model v obecné dimenzi

V případě dimenze $N > 1$ nemusí integrál $\int_{\Omega} g(u)\varphi dx$ pro libovolná $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ ani existovat. Budeme proto předpokládat, že existuje $C > 0$ splňující podmínku

$$|g(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^{q-1}) \text{ pro všechna } \xi \in R, \quad (42)$$

kde q je libovolné při $N = 2$, $1 \leq q < \frac{2N}{N-2}$ při $N > 2$.

Pak je totiž možno užít dvě následující skutečnosti.

Věta o vnoření. Platí $W^{1,2}(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ pro libovolné $q \geq 1$ v případě $N = 2$ a pro $q \in [1, \frac{2N}{N-2})$ v případě $N > 2$. Toto vnoření je navíc kompaktní. Speciálně pokud $u_n \rightharpoonup u$ ve $W^{1,2}(\Omega)$ pak $u_n \rightarrow u$ v $L_q(\Omega)$ s uvedeným q .

Věta o Nemyckého operátoru. Je-li funkce g měřitelná a splňuje podmínku růstu $|g(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^{r/s})$ pro všechna $\xi \in R$, pak zobrazení $u \rightarrow g(u)$ (tzv. Nemyckého operátor) je spojitě zobrazení prostoru $L_r(\Omega)$ do $L_s(\Omega)$.

Je-li nyní $u \in W^{1,2}(\Omega)$, pak z věty o vnoření $u \in L_q(\Omega)$ s uvedeným q . Pokud $1/q + 1/q^* = 1$, pak $\frac{q}{q^*} = q - 1$, tedy z věty o Nemyckého operátoru $g(u) \in L_{q^*}(\Omega)$. Z Hölderovy nerovnosti pak plyne

$$\int_{\Omega} g(u)\varphi dx \leq \left(\int_{\Omega} |g(u)|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \left(\int_{\Omega} |\varphi|^q dx \right)^{1/q},$$

tedy integrál je konečný a předpisem

$$\langle G(u), \varphi \rangle = \int_{\Omega} g(u)\varphi dx \text{ pro každé } u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$$

je korektně definován operátor $G : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{1,2}(\Omega)$. Je-li $\mu_n \rightarrow \mu$, $u_n \rightarrow u$ ve $W^{1,2}(\Omega)$, pak z věty o vnoření $u_n \rightarrow u$ v $L_q(\Omega)$ s uvedeným q a tedy z věty o Nemyckého operátoru $g(u_n) \rightarrow g(u)$ v $L_{q^*}(\Omega)$. Z Hölderovy nerovnosti a věty o vnoření pak plyne

$$\begin{aligned} \|G(u_n) - G(u)\| &= \max_{\|\varphi\| \leq 1} \int_{\Omega} (g(\mu_n, u_n) - g(\mu, u))\varphi dx \leq \\ &\max_{\|\varphi\| \leq 1} \left(\int_{\Omega} |(g(\mu_n, u_n) - g(\mu, u))|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \left(\int_{\Omega} |\varphi|^q dx \right)^{1/q} \leq \\ &C \left(\int_{\Omega} |(g(\mu_n, u_n) - g(\mu, u))|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

tedy $G(u_n) \rightarrow G(u)$.

Ověření podmínky (21) je podstatně obtížnější než v dimenzi 1, viz např. [?].

Tvrzení věty 1.9 platí za dodatečného předpokladu (42) i případě omezené oblasti s lipschitzovskou hranicí v R^N , $N > 1$. Důkaz použitého lemmatu 1.10 je v obecné dimenzi úplně stejný jako v dimenzi 1 a v důkaze věty 1.9 se předpoklad o dimenzi 1 použil pouze při aplikaci lemmatu 1.11, v jehož důkaze jsme užili vnoření $W^{1,2}$ do prostoru spojitých funkcí, které v obecné dimenzi neplatí. K důkazu tohoto lemmatu ve vyšší dimenzi lze použít princip maxima.

2 Destabilizační vliv difúze

Uvažujme omezenou oblast Ω v \mathbb{R}^n s lipschitzovskou hranicí. Zkoumejme okrajovou úlohu

$$\left. \begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + f(u, v) \\ v_t &= d_2 \Delta v + g(u, v) \end{aligned} \right\} \text{ na } [0, +\infty) \times \Omega \quad (43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ na } \partial\Omega, \quad (44)$$

kde f, g jsou dané reálné, pro jednoduchost diferencovatelné, funkce dvou proměnných a d_1, d_2 jsou nezáporné parametry (koeficienty difúze). Předpokládejme, že

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = g(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \quad (45)$$

pro nějaké konstanty $\bar{u}, \bar{v} \geq 0$. Tedy $\bar{U} = [\bar{u}, \bar{v}]$ je stacionární řešení úlohy (43), (44). Ukážeme, že za jistých přirozených předpokladů dochází k následujícímu efektu objevenému v r. 1952 A. M. Turingem [13]. Konstantní řešení \bar{U} je asymptoticky stabilní jakožto řešení systému příslušných obyčejných diferenciálních rovnic bez difúze (tj. pro $d_1 = d_2 = 0$ v (43)), ale pro některé kombinace koeficientů difúze d_1, d_2 je nestabilním řešením úlohy (43), (44). Vzhledem k tomu, že uvažujeme nulový tok hranicí (Neumannovy okrajové podmínky (44)), není proces ovlivněn z vnějšku a proto tato ztráta stability (oproti systému bez difúze) musí být způsobena difúzí. Popíšeme přesně oblasti parametrů d_1, d_2 , pro něž je \bar{U} stabilním řešením úlohy (43), (44) (oblast stability D_S) a pro něž je řešením nestabilním (oblast nestability D_U).

Díky ztrátě stability stacionárního prostorově homogenního řešení \bar{U} dochází k bifurkaci stacionárních prostorově nehomogenních (nekonstantních) řešení. Ty popisují vznik prostorových struktur (spatial patterns) v řadě modelů v biologii.

Základní idea vzniku prostorových struktur v biologii. Uvažujme, že ve zkoumané tkáni (např. v embryu či jeho části) jsou geneticky dané chemické látky (morfogeny), které spolu reagují a zároveň difundují v prostoru a jejichž koncentrace ovlivňuje další chování buněk. Pokud morfogeny jsou v prostoru homogenně rozloženy, není důvod ke vzniku odlišností v chování buněk v různých místech sledované tkáně. Pokud z jakéhokoli důvodu dojde k nehomogennímu rozložení morfogenů, má to za následek rozdílný vývoj různých částí tkáně. Předpokládá se, že reakce a difúze morfogenů je popsána systémem typu (43), kde u a v popisují koncentrace morfogenů. Pokud parametry jsou takové, že je stabilní základní prostorově konstantní stacionární řešení odpovídající jisté rovnováze, tlumí se drobné náhodné poruchy a koncentrace morfogenů se bude udržovat v blízkosti prostorově homogenního stavu. Pokud se ale parametry

změní tak, že prostorově konstantní stacionární řešení stabilitu ztratí a získá ji jiné prostorově nehomogenní stacionární řešení, dá se očekávat, že i vlivem malých poruch dojde k rostoucí nehomogenosti rozložení morfogenů a následně k prostorově nehomogennímu vývoji tkáně. Na základě této myšlenky řada autorů zkoumala vznik prostorových struktur v řadě situací. Mezi nejatraktivnější patří pokus o vysvětlení regeneračních schopností nezmara ([14]) nebo vznik vzorků na srsti zvířat ap. (např. [4]). Zdůrazněme, že tato teorie neodporuje např. teorii Darwinově, jak by se mohlo zdát. Jde tu totiž o vysvětlení jediného kroku vývoje – jak ke zmíněnému vzniku prostorových rozlišení dochází. Proč k němu dochází je otázka jiná a odpověď lze hledat v genetice – předpokládá se, že morfogeny jsou geneticky určeny. Teorie byla řadou autorů dlouho zkoumána čistě z teoretického hlediska, bez důkazu existence morfogenů ap. V devadesátých letech se ale podařilo sledovat v laboratoři skutečnou chemickou reakci vykazující vznik prostorových struktur ([11]) a v posledním desetiletí byla zjištěna v některých speciálních situacích existence morfogenů ([?]). Realnost této teorie tím opět stoupla. Je nutno podotknout, že teorií popisujících vznik prostorových struktur je více.

2.1 Podmínky pro nestabilitu způsobenou difúzí

Zformulujme podmínky, za nichž k výše zmíněnému efektu dochází. Označme $B = (b_{ij})_{i,j=2}^2 = F'(\bar{U})$ Jacobiho matici zobrazení $F = [f,g]$ v bodě \bar{U} , tj.

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}), & b_{12} &= \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v}), \\ b_{21} &= \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}), & b_{22} &= \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v}). \end{aligned}$$

Naši úlohu můžeme zapsat ve tvaru linearizace v bodě \bar{U} plus malá perturbace daná jistými funkcemi n_1, n_2 , tj.

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + b_{11}(u - \bar{u}) + b_{12}(v - \bar{v}) + n_1(u, v), \\ v_t &= d_2 \Delta v + b_{21}(u - \bar{u}) + b_{22}(v - \bar{v}) + n_2(u, v), \end{aligned} \quad (46)$$

kde n_1, n_2 jsou zbytky v Taylorově rozvoji funkcí f, g v bodě \bar{u}, \bar{v} tj.

$$\begin{aligned} n_j(u, v) &= o(|u - \bar{u}| + |v - \bar{v}|) \text{ pro } u \rightarrow \bar{u}, v \rightarrow \bar{v}, \\ f(u, v) &= b_{11}(u - \bar{u}) + b_{12}(v - \bar{v}) + n_1(u, v) \\ g(u, v) &= b_{21}(u - \bar{u}) + b_{22}(v - \bar{v}) + n_2(u, v). \end{aligned}$$

(Připomeňme, že platí (45)).

Předpokládejme, že

$$\det B > 0, \quad \text{tr } B < 0, \quad (47)$$

kde $\det B$ je determinant a $\text{tr } B$ stopa matice B (tj. $\text{tr } B = b_{11} + b_{22}$). Tento předpoklad zaručuje, že \bar{u}, \bar{v} jakožto řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic $u_t = f(u, v)$, $v_t = g(u, v)$ (tj. našeho systému bez difúze) je asymptoticky stabilní.

Dále předpokládejme, že matice B je jednoho z typů

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Přitom třetí typ se dostane z prvního a čtvrtý z druhého pouhou záměnou u a v , tedy stačí uvažovat první dva.

Představme si, že systém (43) popisuje chemickou (biochemickou) reakci, $u(t, x)$ a $v(t, x)$ jsou koncentrace dvou reaktantů v čase t a bodě x . Uvažujme první typ matice B ze (48), tj.

$$b_{11} > 0, \quad b_{12} < 0, \quad b_{21} > 0, \quad b_{22} < 0. \quad (49)$$

Pak se jedná v okolí stacionárního řešení o reakci typu aktivátor-inhibitor. Z rovnic (46) je vidět, že čím více převyšuje u rovnovážnou hodnotu \bar{u} , tím více přispívá k produkci sebe sama (neboť $b_{11} > 0$), zatímco čím více v převyšuje \bar{v} , tím více brzdí produkci u (neboť $b_{12} < 0$). Stejně z druhé rovnice pro produkci v . Tedy u aktivuje tvorbu sebe sama i tvorbu v , zatímco v inhibuje tvorbu u i v (míněno v okolí rovnovážného stavu \bar{u}, \bar{v} – pro hodnoty vzdálené \bar{u}, \bar{v} už mohou hrát podstatnou roli nelinearity n_1, n_2 , které jsou malé pouze v okolí \bar{u}, \bar{v}).

Druhý typ matice B z (48), tj.

$$b_{11} > 0, \quad b_{12} > 0, \quad b_{21} < 0, \quad b_{22} < 0 \quad (50)$$

odpovídá reakcím označovaným jako "positive feedback" (což je zavádějící označení užívané snad s ohledem na historii zkoumání takových systémů) nebo "substrate depletion". Při koncentracích blízkých rovnovážnému stavu \bar{u}, \bar{v} nárůst koncentrace prvního i druhého reaktantu zvyšuje produkci prvního a snižuje produkci druhého reaktantu.

Poznámka 17. Je přirozené položit $w = u - \bar{u}$, $z = v - \bar{v}$, $\tilde{n}_j(w, z) = n_j(w + \bar{u}, z + \bar{v})$ a zkoumat systém

$$\begin{aligned} w_t &= d_1 \Delta w + b_{11} w + b_{12} z + \tilde{n}_1(w, z) \\ z_t &= d_2 \Delta z + b_{21} w + b_{22} z + \tilde{n}_2(w, z). \end{aligned} \quad (51)$$

Jeho řešení w, z popisuje odchylky skutečného řešení u, v původního systému od stacionárního stavu \bar{u}, \bar{v} . Stabilita řešení \bar{u}, \bar{v} systému (43), (44) je ekvivalentní se stabilitou nulového řešení systému (51), (44). Funkce \tilde{n}_j jsou ovšem v okolí nuly malé perturbace, tj.

$$\tilde{n}_j(w, z) = o(|w| + |z|) \text{ pro } |w| + |z| \rightarrow 0. \quad (52)$$

2.2 Oblast stability a nestability

O stabilitě řešení \bar{U} vypovídají znaménka reálných částí vlastních čísel úlohy

$$\begin{aligned} d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v &= \lambda u \\ d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v &= \lambda v \text{ na } \Omega \end{aligned} \quad (53)$$

s okrajovými podmínkami (44).

Věta 2.1. (*Viz např. [12].*) *Jestliže pro dané $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\operatorname{Re} \lambda \leq -\varepsilon$ pro všechna vlastní čísla úlohy (53), (44), pak řešení \bar{U} systému (43), (44) je stabilní v normě $W^{1,2}(\Omega)$. Pokud existuje vlastní číslo λ úlohy (53), (44) takové, že $\operatorname{Re} \lambda > 0$, pak řešení \bar{U} je nestabilní.*

Pokusme se zjistit, pro která d_1, d_2 je splněna některá z podmínek z věty 2.1.

Slabé řešení úlohy (53), (44) je dvojice $U = [u, v] \in W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ taková, že

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d_1 \nabla u \cdot \nabla \varphi - (b_{11} u + b_{12} v - \lambda u) \varphi dx &= 0 \\ \int_{\Omega} d_2 \nabla v \cdot \nabla \varphi - (b_{21} u + b_{22} v - \lambda v) \varphi dx &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

pro všechna $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Prostor $W^{1,2}(\Omega)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + uv \, dx.$$

Definujme operátor $A : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{1,2}(\Omega)$ předpisem

$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \varphi \, dy \quad \forall u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega). \quad (55)$$

Stejně jako v sekci 1.5 je operátor A je lineární, kompaktní a symetrický. Vzhledem k tomu, že (54) můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d_1 (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) - ((b_{11} + d_1)u + b_{12} v - \lambda u) \varphi dx &= 0 \\ \int_{\Omega} d_2 (\nabla v \cdot \nabla \varphi + v \varphi) - (b_{21} u + (b_{22} + d_2)v - \lambda v) \varphi dx &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

pro všechna $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$,

plyne přímo z definice skalárního součinu a operátoru A , že $U = [u, v] \in W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ je slabé řešení právě když

$$\begin{aligned} d_1 u - (b_{11} + d_1)Au - b_{12}Av + \lambda Au &= 0 \\ d_2 v - b_{21}Au - (b_{22} + d_2)Av + \lambda Av &= 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Označme

$$D(d) = \begin{pmatrix} d_1, 0 \\ 0, d_2 \end{pmatrix}, \quad B(d) = \begin{pmatrix} b_{11} + d_1, b_{12} \\ b_{21}, b_{22} + d_2 \end{pmatrix}, \quad AU = \begin{pmatrix} Au \\ Av \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Můžeme teď (57) zapsat ve vektorovém tvaru jako

$$D(d)U - B(d)AU + \lambda AU = 0. \quad (59)$$

Úloha

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \kappa u \text{ na } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ na } \partial\Omega \end{aligned} \quad (60)$$

má nekonečnou posloupnost vlastních čísel κ_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ přičemž $\kappa_0 = 0$ a příslušná vlastní funkce e_0 je konstantní. Slabé řešení úlohy (60) je funkce $u \in W^{1,2}(\Omega)$ taková, že (po vhodném přepsání)

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi - (1 + \kappa)u\varphi dx = 0 \text{ pro všechna } \varphi \in W^{1,2}(\Omega), \quad (61)$$

což je ekvivalentní rovnici $\frac{1}{1+\kappa}u = Au$. Ze známých výsledků o regularitě slabých řešení (viz např. [?]) plyne, že řešení úlohy (61) jsou klasické vlastní funkce úlohy (60). Odtud plyne, že operátor A má vlastní čísla $\nu_n = \frac{1}{1+\kappa_n}$, kde κ_n jsou vlastní čísla úlohy (60), a že příslušné vlastní vektory operátoru A jsou vlastní funkce úlohy (60). Vlastní vektory lineárního kompaktního symetrického operátoru v Hilbertově prostoru lze vybrat tak, že tvoří ortonormální systém e_n (viz např. [3]) a tedy pro náš operátor A to je zároveň ortonormální (ve $W^{1,2}(\Omega)$) systém vlastních funkcí úlohy (60).

Tedy libovolnou dvojici $U = [u, v] \in W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ můžeme zapsat ve tvaru (ve $W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ konvergentní) řady

$$U(x) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j e_j(x), \quad (62)$$

kde $F_j = [a_j^1, a_j^2]^T \in \mathbb{R}^2$, tj. máme $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^1 e_j(x)$, $v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 e_j(x)$. Díky spojitosti lineárního operátoru A je

$$A\left(\sum_{j=0}^{\infty} F_j e_j\right) = A\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k F_j e_j\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k A F_j e_j = \sum_{j=0}^{\infty} F_j A e_j.$$

Dosažením do (59) dostáváme

$$\sum_{j=0}^{\infty} (D(d) - B(d)A + \lambda A)F_j e_j = 0.$$

Odtud s užitím toho, že $Ae_j = \frac{1}{1+\kappa_j}e_j$ a vynásobením $1 + \kappa_j$ dostáváme

$$\sum_{j=0}^{\infty} ((1 + \kappa_j)D(d) - B(d) + \lambda E)F_j e_j = 0,$$

kde E je jednotková matice. Vzhledem k tomu, že $B(d) - D(d) = B$ a že e_j je ortogonální systém ve $W^{1,2}(\Omega)$, je tato rovnost splněna právě když

$$(\kappa_j D(d) - B + \lambda E)F_j = 0 \quad (63)$$

pro všechna $j = 0, 1, 2, \dots$ (Uvědomme si, že stále pracujeme s vektorovými zápisy, speciálně poslední výraz je prvek \mathbb{R}^2 .) Dále λ je vlastní číslo úlohy (53), (44) (tj. (59)) právě když existuje nenulové řešení, tj. U pro něž $F_j \neq 0$ v rozvoji (62) pro nějaké j . Algebraická rovnice (63) (pro dvě neznámé a_j^1, a_j^2) má přitom nenulové řešení $F_j = [a_j^1, a_j^2] \in \mathbb{R}^2$ právě když

$$\begin{aligned} \det(\kappa_j D(d) - B + \lambda E) &= 0, \text{ tj.} \\ 0 &= (\kappa_j d_1 - b_{11} + \lambda)(\kappa_j d_2 - b_{22} + \lambda) - b_{12}b_{21} \\ &= \lambda^2 + \lambda[\kappa_j(d_1 + d_2) - (b_{11} + b_{22})] + (\kappa_j d_1 - b_{11})(\kappa_j d_2 - b_{22}) - b_{12}b_{21}. \end{aligned}$$

Tedy λ je vlastní číslo úlohy (53), (44) právě když pro nějaké j je to kořen této kvadratické rovnice, tj. $\lambda = \lambda_1^{(j)}$ nebo $\lambda = \lambda_2^{(j)}$, kde

$$\lambda_{1,2}^{(j)} = \frac{b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j \pm \sqrt{[b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j]^2 - 4H_d(\kappa_j)}}{2}, \quad (64)$$

kde značíme

$$H_d(\kappa) = (\kappa d_1 - b_{11})(\kappa d_2 - b_{22}) - b_{12}b_{21}.$$

Z předpokladu (48) o tvaru matice B máme $b_{12}b_{21} < 0$ a tedy pro $d_2 > 0$ z $H_d(\kappa_j) = 0$ plyne $d_1 \kappa_j < b_{11}$ a

$$d_2 = \frac{1}{\kappa_j} \left(\frac{b_{12}b_{21}}{d_1 \kappa_j - b_{11}} + b_{22} \right), \quad (65)$$

což je rovnice hyperboly, která má asymptoty $d_1 = \frac{b_{11}}{\kappa_j}$ a $d_2 = \frac{b_{22}}{\kappa_j}$. Zajímá nás ovšem pouze její část ležící v kladném kvadrantu \mathbb{R}_+^2 , neboť smysl mají pouze kladné koeficienty difúze d_1, d_2 .

Označme

$$C_j = \{d = [d_1, d_2] \in \mathbb{R}_+^2; \text{ platí (65)}\} = \{d = [d_1, d_2] \in \mathbb{R}_+^2; H_d(\kappa_j) = 0\}$$

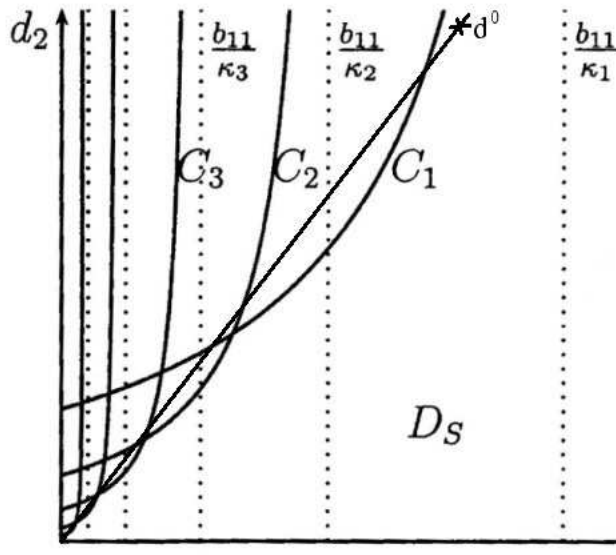
pro $j = 1, 2, \dots$ (Pro $j = 0$ je $\kappa_0 = 0$, $H_d(0) = \det B \neq 0$ pro všechna d a za předpokladu (47) proto $C_0 = \emptyset$). Tedy C_j je ta část výše zmíněné hyperboly, která leží v kladném kvadrantu. Tyto křivky C_j mají tvar patrný z obr. 1. Výpočtem se zjistí, že mají společnou tečnu T , která prochází počátkem.

Poznámka 18. Jsou-li všechna vlastní čísla Laplaciánu na naší oblasti prostá, tj. $\kappa_n < \kappa_{n+1}$ pro všechna $n = 0, 1, 2, \dots$, pak $C_n \neq C_j$ pro všechna $n \neq j$. Pokud vlastní číslo κ_n má násobnost m_j , tj. $\kappa_{n-1} \neq \kappa_n = \dots = \kappa_{n+m_j-1} < \kappa_{n+m_j}$ pak $C_{n-1} \neq C_n = \dots = C_{n+m_j-1} \neq C_{n+m_j}$.

Označme nyní C_E obálku křivek C_j ($j = 1, 2, \dots$), viz obr. 1, a položme

$$D_S = \{d \in \mathbb{R}_+^2; d \text{ leží vpravo od } C_E \text{ (tj. od všech } C_j)\},$$

$$D_U = \{d \in \mathbb{R}_+^2; d \text{ leží vlevo od } C_E \text{ (tj. alespoň od jedné } C_j)\}.$$



Obr. 1. Hyperboly C_n , oblast stability D_S a nestability D_U

Následující věta nás opravňuje nazývat D_S oblast stability a D_U oblast nestability.

Věta 2.2. *Nechť platí (47) a matice je jednoho z typů v (48). Pak pro $d \in D_S$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\text{Re } \lambda < -\varepsilon$ pro všechna vlastní čísla λ úlohy (53), (44). Pro $d \in D_U$ existuje vlastní číslo $\lambda > 0$ úlohy (53), (44). Přesněji, pro vlastní číslo $\lambda_j := \lambda_1^{(j)}$ z (64) platí $\text{Re } \lambda_j < 0$ pro d vpravo od hyperboly C_j , $\lambda_j = 0$ pro $d \in C_j$ a $\lambda_j > 0$ pro d vlevo od C_j . Pro $d \in C_E \cap C_j$ je $\lambda_j = 0$ vlastní číslo s největší reálnou částí úlohy (53), (44). Vždy je $\text{Re } \lambda_2 < b_{11} + b_{22} < 0$.*

Speciálně stacionární řešení \bar{U} je stabilní v normě $W^{1,2}(\Omega)$ pro $d \in D_S$ a nestabilní pro $d \in D_U$.

Poznamenejme, že pro d dostatečně daleko vpravo od C_j je λ_j komplexní, tedy musíme skutečně mluvit o reálné části, ale pro d blízko C_j a vlevo od této hyperboly je λ_j reálné, jak plyne ze vzorce (64).

Důkaz: Jak jsme viděli výše, všechna vlastní čísla úlohy (53), (44) jsou $\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, \dots$ z (64). Z předpokladu (47) ihned dostaneme, že $\operatorname{Re} \lambda_2^{(j)} < 0$ vždy pro všechna $j = 0, 1, 2, \dots$ a $\operatorname{Re} \lambda_1^{(j)} < 0$ pro $H_d(\kappa_j) > 0$, $\lambda_1^{(j)} = 0$ pro $H_d(\kappa_j) = 0$, $\lambda_1^{(j)} > 0$ pro $H_d(\kappa_j) < 0$. (Přitom $\lambda_1^{(j)}$ je reálné pro $H_d(\kappa_j) > 0$ dost malé.) Zároveň ale je $H_d(\kappa_j) > 0$ pro d vpravo od C_j , $H_d(\kappa_j) = 0$ pro $d \in C_j$ a $H_d(\kappa_j) < 0$ pro d vlevo od C_j . Tedy přímo z definice D_S, D_U, C_j plyne, že pro $d \in D_S$ je $\operatorname{Re} \lambda_1^{(j)} < 0$ pro všechna j , pro $d \in D_U$ je $\operatorname{Re} \lambda_1^{(j)} > 0$ pro nějaké j (pro ta j , pro něž d je vlevo od C_j) a pro $d \in C_j$ je $\lambda_1^{(j)} = 0$, $j = 1, 2, \dots$

Kdyby pro nějaké $d \in D_S$ neexistovalo $\varepsilon > 0$ takové, že $\operatorname{Re} \lambda_1^{(j)} < -\varepsilon$ pro všechna j , pak by existovala posloupnost indexů n_j taková, že $\lambda_{n_j} \rightarrow 0$. Zřejmě by muselo být $n_j \rightarrow \infty$ a ze vzorce (64) by plynulo $H_d(\kappa_{n_j}) \rightarrow 0$. Přitom ale z definice $H_d(\kappa)$ plyne $H_d(\kappa) \rightarrow +\infty$ pro $\kappa \rightarrow \infty$. To je spor a existence zmíněného malého $\varepsilon > 0$ je dokázána.

Je-li $d \in C_E \cap C_j$, pak $\lambda_1^{(j)} = 0$ pro všechna taková j a $\operatorname{Re} \lambda_1^{(k)} < 0$ pro všechna k , pro něž $d \notin C_k$, protože d leží vpravo od těchto hyperbol. Tedy $\lambda = 0$ je vlastní číslo s největší reálnou částí.

Tvrzení o stabilitě plyne teď z věty 2.1.

Poznámka 19. Většinu úvah nad větou 2.2 (výpočet vlastních čísel, formální odvození křivek C_j , na nichž je jisté vlastní číslo nulové) lze provést i bez předpokladu (48), ale elementárními úvahami se zjistí, že $C_j \neq \emptyset$ pro nějaké j právě když je to pravda pro všechna $j = 1, 2, \dots$, a platí to za předpokladu (47) právě když matice B je jednoho z typů uvedených v (48). Bez předpokladu (47) nemá ovšem smysl mluvit o ztrátě stability vlivem difúze, neboť stacionární řešení \bar{U} je nestabilní i pro systém bez difúze.

Např. pro matice typu $\begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix}$ splňující (47) je $C_j = \emptyset$, neboť pro libovolné $d = [d_1, d_2] \in \mathbb{R}_+^2$ máme

$$H_d(\kappa_j) = (\kappa_j d_1 - b_{11})(\kappa_j d_2 - b_{22}) - b_{12} b_{21} > b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} > 0,$$

tedy $d \notin C_j$. Pro matice typu $\begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}$ neplatí (47).

2.3 Tvar vlastních funkcí, řešení linearizovaného systému

Ukážeme nyní, že při odvození věty 2.2 jsme vlastně zároveň odvodili tvar vlastních funkcí úlohy (53), (44). Jejich obě složky jsou dány vlastními funkcemi

Laplaciánu. Speciálně pro $\lambda = 0$ dostaneme řešení linearizovaného systému.

Věta 2.3. *Je-li λ vlastní číslo úlohy (53), (44), pak příslušné vlastní vektory tvoří podprostor*

$$E_d(\lambda) = \text{span}\left\{ \left[e_i, \frac{d_1 \kappa_i - b_{11} + \lambda}{b_{12}} e_i \right] \right\}_{i \in I_d(\lambda)}, \quad (66)$$

kde $I_d(\lambda) = \{j; (63) \text{ má netriviální řešení}\}$.

Důkaz: Z úvah před větou 2.2 plyne, že λ je vlastní číslo úlohy (53), (44) právě když algebraická rovnice (63) má pro nějaké j netriviální řešení a že vlastní vektory jsou dvojice $U = \sum F_j e_j$, kde se sčítá přes všechna j , pro něž má (63) netriviální řešení F_j . Řešení rovnice (63) jsou právě všechny násobky vektoru $[1, \frac{d_1 \kappa_j - b_{11} + \lambda}{b_{12}}]$, tedy platí (66).

Věta 2.4. *Nechť j -té vlastní číslo κ_j úlohy (60) je prosté. Pokud $d \in C_j$, $d \notin C_k$ pro všechna $k \neq j$ (tj. d leží pouze na jedné hyperbole), pak řešení úlohy (53), (44) s $\lambda = 0$ tvoří podprostor*

$$E_d(0) = \text{span}\left\{ \left[e_j, \frac{d_1 \kappa_j - b_{11}}{b_{12}} e_j \right] \right\}.$$

Nechť vlastní čísla κ_j, κ_k úlohy (60) jsou prostá, $j \neq k$. Pokud $d \in C_j \cap C_k$, (tj. d leží v průsečíku dvou různých hyperbol), pak řešení úlohy (53), (44) s $\lambda = 0$ tvoří podprostor

$$\text{span}\left\{ \left[e_i, \frac{d_1 \kappa_i - b_{11}}{b_{12}} e_i \right] \right\}_{i \in \{j, k\}}.$$

Důkaz: Nechť nejdříve $d \in C_j$, $d \notin C_k$ pro všechna $k \neq j$. Z odvození C_j plyne, že $\det(\kappa_n D(d) - B) = 0$ právě jen pro $n = k$, tedy (63) s $\lambda = 0$ má netriviální řešení právě jen pro uvažované j . Tedy ve větě 2.3 je $I_d(0) = \{j\}$ a tvrzení plyne z této věty. Nechť nyní $d \in C_j \cap C_\ell$, $C_j \neq C_\ell$. Pak $\det(\kappa_n D(d) - B) = 0$ právě jen pro $n = j$ a $n = \ell$, tedy (63) s $\lambda = 0$ má netriviální řešení právě jen pro uvažované j a ℓ . Tedy $I_d(0) = \{j, \ell\}$ a tvrzení plyne opět z věty 2.3.

Věta 2.5. *Pokud vlastní čísla κ_j úlohy (60) jsou obecně násobná, označme m_j násobnost vlastního čísla κ_j , tj. platí $\kappa_{j-1} \neq \kappa_j = \dots = \kappa_{j+m_j-1} \neq \kappa_{j+m_j}$ a tedy také $C_{j-1} \neq C_j = \dots = C_{j+m_j-1} \neq C_{j+m_j}$. Pokud $d \in C_j$, $d \notin C_k$ pro všechna k pro něž $C_k \neq C_j$ (tj. d leží pouze na jedné hyperbole), pak řešení úlohy (53), (44) s $\lambda = 0$ tvoří podprostor*

$$E(d) = \text{span}\left\{ \left[e_i, \frac{d_1 \kappa_j - b_{11}}{b_{12}} e_i \right] \right\}_{i=j}^{j+m_j-1}. \quad (67)$$

Pokud $d \in C_j \cap C_k$, $C_j \neq C_k$ (tj. d leží v průsečíku dvou různých hyperbol), pak řešení úlohy (53), (44) s $\lambda = 0$ tvoří podprostor

$$\text{span}\left\{ \left[e_i, \frac{d \kappa_i - b_{11}}{b_{12}} e_i \right] \right\}_{i \in I_{j,k}},$$

kde $I_{j,k} = \{j, \dots, j + m_j - 1\} \cup \{k, \dots, k + m_k - 1\}$.

Důkaz plyne z definice hyperbol a z věty 2.3 podobně jako věta 2.4.

V následujícím bude $\lambda_j := \lambda_1^{(j)}$ vlastní číslo z (64) úlohy (53), (44), $F_j = [a_1^{(j)}, a_2^{(j)}]$ řešení systému algebraických rovnic (63) a e_j bude j -tá vlastní funkce Laplaceanu (tj. úlohy (60)).

Věta 2.6. *Funkce $W_j(t, x) = e^{\lambda_j t} F_j e_j(x)$ je řešením linearizovaného systému*

$$\begin{aligned} w_t &= d_1 \Delta w + b_{11} w + b_{12} z \\ z_t &= d_2 \Delta z + b_{22} w + b_{22} z \end{aligned} \quad (68)$$

s (44). *Speciálně je-li d vlevo od C_j , pak $\lim|U_j(t, x)| = \infty$ pro všechna $x \in \Omega$.*

Uvědomme si, že (68) je linearizací (51), jehož řešení popisují odchylky (poruchy) od rovnovážného stavu \bar{U} (viz pozn. 17). Poznamenejme, že též libovolný (i libovolně malý) násobek dvojice funkcí $W_j(t, x)$ je opět řešení (68), (44) díky linearitě systému. Tedy pokud d je vlevo od nějaké hyperboly C_j , pak libovolně malé násobky funkce $F_j e_j$ jsou počátečními podmínkami, ze kterých řešení linearizovaného systému (68), (44) konvergují k nekonečnu. Obecněji, buď $d \in D_U$ a uvažujme libovolnou poruchu (počáteční podmínku) $W_0(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j F_j e_j(x)$, kde $\varepsilon_j \neq 0$ alespoň pro jedno j , pro něž d je vlevo od C_j . Pak se tato porucha s časem zvětšuje, neboť její vývoj je popsán funkcí $W(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{\lambda_j t} \varepsilon_j F_j e_j$, která je řešením systému (68), (44).

Zdůrazněme, že zde nejde o původní systém nelineární, ale i pro něj je pro $d \in D_U$ triviální řešení nestabilní podle věty 2.2.

Důkaz věty 2.6 se provede přímým dosazením a užitím (63).

2.4 Bifurkace stacionárních prostorově nehomogenních řešení

Uvažujme systém (51) popisující odchylky od základního rovnovážného stavu \bar{U} . Zkoumejme stacionární řešení tohoto systému na oblasti $L\Omega$ s Neumannovými okrajovými podmínkami. Koeficienty difúze $d_1 = d_1^0, d_2 = d_2^0$ budou pevné a velikost oblasti L bude bifurkační parametr. Stejně jako v sekci 1.2 hledání stacionárních řešení této úlohy na $L\Omega$ je ekvivalentní hledání řešení analogické úlohy na pevné oblasti Ω , přičemž parametr L přejde do koeficientů difúze, tedy

$$\begin{aligned} \frac{d_1^0}{L^2} \Delta w + b_{11} w + b_{12} z + \tilde{n}_1(w, z) &= 0 \\ \frac{d_2^0}{L^2} \Delta z + b_{21} w + b_{22} z + \tilde{n}_2(w, z) &= 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Budeme zkoumat slabá řešení, tj. dvojice $W = [w, z] \in W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ takové, že

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{d_1^0}{L^2} \nabla w \cdot \nabla \varphi - (b_{11}w + b_{12}z + \tilde{n}_1(w, z)) \varphi \, dx &= 0 \\ \int_{\Omega} \frac{d_2^0}{L^2} \nabla z \cdot \nabla \varphi - (b_{21}w + b_{22}z + \tilde{n}_2(w, z)) \varphi \, dx &= 0 \end{aligned} \quad (70)$$

pro všechna $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

V případě $N > 1$ integrály z $\tilde{n}_j(w, z)\varphi$ pro všechna w, z, φ nemusí bez dodatečných předpokladů ani existovat. Budeme proto předpokládat existenci konstanty $C > 0$ takové, že

$$|\tilde{n}_j(w, z)| \leq C(1 + |w|^{q-1} + |z|^{q-1}) \text{ pro všechna } w, z \in \mathbb{R}, \quad (71)$$

kde q je libovolné při $N = 2, 1 < q < \frac{2N}{N-2}$ při $N > 2$.

Srov. se sekcí 1.10.

V dalším budeme řešením mínit vždy slabé řešení.

Bifurkačním bodem úlohy (69), (44) míníme parametr L_0 takový, že v libovolně malém okolí bodu $[L_0, 0]$ v prostoru $\mathbb{R} \times W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ existuje $[L, w, z] \in \mathbb{R} \times W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ s $[w, z] \neq [0, 0]$, splňující (70) (tj. (69), (44) ve smyslu slabého řešení).

Následující tvrzení říká, že je-li L_0 bifurkační bod, pak linearizovaná úloha

$$\begin{aligned} \frac{d_1^0}{L^2} \Delta w + b_{11}w + b_{12}z &= 0 \\ \frac{d_2^0}{L^2} \Delta z + b_{21}w + b_{22}z &= 0. \end{aligned} \quad (72)$$

s $L = L_0$ a s (44) má netriviální řešení a jedině ve směru těchto netriviálních řešení mohou řešení nelineární úlohy bifurkovat.

Lemma 2.7. (Srov. s lemmatem 1.5.) *Je-li L_0 bifurkační bod úlohy (69), (44), pak $\frac{d_j^0}{L_0^2} \in C_j$ pro nějaké j . Je-li $[L_n, w_n, z_n] \rightarrow [L_0, 0, 0]$ v $\mathbb{R} \times W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$, $\frac{u_n}{\|u_n\| + \|v_n\|} \rightharpoonup w_0$, $\frac{v_n}{\|u_n\| + \|v_n\|} \rightharpoonup z_0$, $[w_n, z_n]$ jsou řešení úlohy (69), (44) s $L = L_n$, pak $\frac{u_n}{\|u_n\| + \|v_n\|} \rightarrow w_0$, $\frac{v_n}{\|u_n\| + \|v_n\|} \rightarrow z_0$ a $[w_0, z_0]$ je řešení úlohy (72), (44) s $L = L_0$.*

Důkaz vyplyne přímo z obecnějšího lemmatu 2.9 užitého na operátory nad ním zavedenými.

Označme T společnou tečnu k hyperbolám C_j a S uzávěr množiny netriviálních (slabých) řešení úlohy (69), (44) tj.

$$S = \overline{\{[L, w, z] \in \mathbb{R} \times W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega); \text{ platí (70), } [w, z] \neq [0, 0]\}}.$$

Přímo z definice plyne, že $[L_0, 0] \in S$ právě když L_0 je bifurkační bod.

Věta 2.8. *Nechť platí (47) a matice B je jednoho z typů v (48). Nechť $d^0 = [d_1^0, d_2^0]$ pevně leží nad tečnou T . Uvažujme L_0 takové, že $d^0/L_0^2 \in C_n$ pro nějaké n , $d^0/L_0^2 \notin C_k$ pro všechna $k \neq n$, tedy speciálně vlastní číslo κ_n úlohy (60) je prosté. Předpokládejme, že je splněna podmínka (52) a v případě $N > 1$ také (71). Pak L_0 je bifurkační bod úlohy (69), (44). Navíc bifurkace v bodě L_0 je globální v tom smyslu, že komponenta S_0 množiny S obsahující bod $[L_0, 0]$ splňuje alespoň jednu z následujících podmínek.*

- (a) *Existuje $\hat{L} \neq L_0$ takové, že $[\hat{L}, 0] \in S_0$.*
(b) *Existuje posloupnost $[L_n, W_n] \in S_0$ taková, že $L_n + \|W_n\| \rightarrow \infty$ nebo $L_n \rightarrow 0+$.*

V případě (a) je ovšem $\frac{d^0}{L^2} \in C_j$ pro nějaké j podle lemmatu 2.7.

Poznámka 20. Pokud v okolí bodu $[0, 0] \in \mathbb{R}^2$ neexistují $[\xi, \eta] \in \mathbb{R}^2$ splňující $n_j(\xi, \eta) = 0$, $j = 1, 2$, pak úloha (69), (44) nemá prostorově konstantní řešení blízka řešení nulovému. Tedy bifurkující řešení ležící v blízkosti bifurkačního bodu musí být nekonstantní, tj. popisují prostorové vzorky.

Položme $H = W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$. Pro důkaz věty 2.8 přepíšeme naši úlohu na operátorovou rovnici v tomto prostoru H .

Prostor $W^{1,2}(\Omega)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + uv \, dx$$

a tedy H je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle U, W \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, z \rangle \text{ pro } U = [u, v], W = [w, z] \in H.$$

Definujme operátory $A : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{1,2}(\Omega)$ a $N_j : H \rightarrow H$ předpisem

$$\langle Aw, \varphi \rangle = \int_{\Omega} w \varphi \, dy \quad \forall w, \varphi \in W^{1,2}(\Omega), \quad (73)$$

$$\langle N_j(w, z), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \tilde{n}_j(w, z) \varphi \, dy \quad \forall w, \varphi \in H. \quad (74)$$

Podobně jako v sekci 1.10 tyto operátory jsou spojité a kompaktní. Přitom A je lineární, N_j jsou malé nelineární perturbace, tj.

$$\lim_{\|w\| + \|z\| \rightarrow 0} \frac{\|N_j(w, z)\|}{\|w\| + \|z\|} = 0. \quad (75)$$

Důkaz posledního tvrzení je v obecné dimenzi podstatně složitější než v poznámce 12 pro dimenzi 1 (viz [?]). Vzhledem k tomu, že (70) můžeme ekvivalentně zap-

sat jako

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{d_1^0}{L^2} (\nabla w \cdot \nabla \varphi + w \varphi) - \left((b_{11} + \frac{d_1^0}{L^2}) w + b_{12} z + \tilde{n}_1(w, z) \right) \varphi dx &= 0 \\ \int_{\Omega} \frac{d_2^0}{L^2} (\nabla z \cdot \nabla \varphi + z \varphi) - \left(b_{21} w + (b_{22} + \frac{d_2^0}{L^2}) z + \tilde{n}_2(w, z) \right) \varphi dx &= 0 \end{aligned} \quad (76)$$

pro všechna $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$,

plyne přímo z definice skalárního součinu a operátorů, že $W = [w, z]$ je slabé řešení právě když

$$\begin{aligned} \frac{d_1^0}{L^2} w - (b_{11} + \frac{d_1^0}{L^2}) Aw - b_{12} Az - N_1(w, z) &= 0 \\ \frac{d_2^0}{L^2} w - b_{21} Aw - (b_{22} + \frac{d_2^0}{L^2}) Az - N_2(w, z) &= 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Užijeme-li označení (58) a ještě

$$\tilde{N}(W) = [N_1(w, z), N_2(w, z)]^T,$$

můžeme (77) zapsat ve vektorovém tvaru jako

$$D(d_0/L^2)W - B(d_0/L^2)AW - \tilde{N}(W) = 0. \quad (78)$$

Položme $\mu = L^2$, označme $O = \{[\mu, U]; \mu > 0, U \in H\}$ a zavedme konečné operátory $T, N : O \rightarrow H$ předpisem

$$T(\mu, W) = D(d_0/\mu)^{-1} B(d_0/\mu) AW, \quad N(\mu, W) = D(d_0/\mu)^{-1} \tilde{N}(W), \quad (79)$$

kde D^{-1} značí matici inverzní k D . Pro pevné μ je

$$T_{\mu} := T(\mu, \cdot)$$

lineární operátor v H , N je malá perturbace a rovnice (78) má tvar

$$W - T_{\mu}(W) - N(\mu, W) = 0. \quad (80)$$

Tato rovnice má pro každé $\mu > 0$ nulové řešení $W = 0$.

Bifurkačním bodem zde míníme parametr μ_0 takový, že v každém okolí bodu $[\mu_0, 0]$ v $\mathbb{R} \times H$ existuje netriviální řešení, tj. $[\mu, U]$ splňující (80), $U \neq 0$.

Lemma 2.9. *Je-li μ_0 bifurkační bod rovnice (80), pak linearizovaná rovnice*

$$W - T_{\mu_0}(W) = 0 \quad (81)$$

má netriviální řešení, tj. $\lambda = 0$ je vlastní číslo operátoru $I - T_{\mu_0}$. Jestliže $[\mu_n, W_n]$ splňují (80) a $[\mu_n, W_n] \rightarrow [\mu_0, 0]$, $\frac{W_n}{\|W_n\|} \rightharpoonup W_0$, pak $\frac{W_n}{\|W_n\|} \rightarrow W_0$ a W_0 splňuje (81), tj. W_0 je vlastní vektor operátoru $I - T_{\mu_0}$ příslušný λ_0 .

Důkaz je skoro stejný jako důkaz lemmatu 1.5. Stačí si uvědomit, že je-li $W_n \rightarrow W$, $\mu_n \rightarrow \mu$ pak $T_{\mu_n}(W_n) \rightarrow T_\mu(W)$, což plyne z kompaktnosti operátoru A a ze (79).

Pro rovnice typu (80) jsme v předchozí kapitole bifurkační věty neformulovali, ale můžeme pro ni použít obecnější následující globální bifurkační větu. Ta zhruba řečeno zaručuje, že pokud vlastní číslo λ liché násobnosti úlohy

$$W - T_\mu W = \lambda W \quad (82)$$

přechází přes nulu (mění znaménko) při přechodu parametru μ přes dané μ_0 , pak μ_0 je globální bifurkační bod.

Označme C uzávěr množiny netriviálních řešení úlohy (80), tj.

$$C = \overline{\{[\mu, W] \in O; [\mu, W] \text{ splňuje (80), } W \neq 0\}}.$$

Tedy μ_0 je bifurkační bod právě když $[\mu_0, 0] \in C$.

Věta 2.10. (viz např. [?]) Uvažujme reálný Hilbertův prostor H a spojitě kompaktní operátory $T, N : O \rightarrow H$, kde O je otevřená množina v $\mathbb{R} \times H$. Předpokládejme, že $T_\mu := T(\mu, \cdot)$ je lineární pro každé pevné μ pro něž $[\mu, 0] \in O$ a

$$\lim_{\|U\| \rightarrow 0} \frac{\|N(\mu, U)\|}{\|U\|} = 0 \text{ stejnoměrně pro } \mu \text{ z kompaktních intervalů.} \quad (83)$$

Uvažujme μ_0 takové, že $[\mu_0, 0] \in O$ a pro μ z okolí bodu μ_0 má úloha (82) vlastní číslo λ_μ liché násobnosti závisující spojitě na μ a takové, že

$$\lambda_{\mu_0} = 0, \text{ sign} \lambda_{\mu_0+\varepsilon} = -\text{sign} \lambda_{\mu_0-\varepsilon} \text{ pro všechna malá } \varepsilon. \quad (84)$$

Pak μ_0 je bifurkační bod rovnice (80). Navíc bifurkace v bodě μ_0 je globální v tom smyslu, že komponenta C_0 množiny C obsahující bod $[\mu_0, 0]$ splňuje alespoň jednu z následujících podmínek.

(a) Existuje $\hat{\mu} \neq \mu_0$ takové, že $[\hat{\mu}, 0] \in C_0$.

(b) Existuje posloupnost $[\mu_n, W_n] \in C_0$ taková, že $[\mu_n, W_n] \rightarrow \partial O$ nebo $\|W_n\| + |\mu_n| \rightarrow \infty$.

Poznámka 21. Uvažujme speciální případ $T_\mu = \mu A$, kde A je lineární kompaktní operátor a buď μ_0 jeho charakteristické číslo, u charakteristický vektor, tedy $u - \mu_0 A u = 0$. Vynásobením $\frac{\mu_0 + \varepsilon}{\mu_0}$ dostaneme

$$\frac{\mu_0 + \varepsilon}{\mu_0} u - (\mu_0 + \varepsilon) A u = 0, \text{ tj. } u - (\mu_0 + \varepsilon) A u = -\frac{\varepsilon}{\mu_0} u.$$

Tedy operátor $I - (\mu_0 + \varepsilon) A = I - T_{\mu_0 + \varepsilon}$ má vlastní číslo $\lambda_{\mu_0 + \varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{\mu_0}$ a u je jeho vlastní vektor. Máme $\lambda_{\mu_0 + \varepsilon} < 0$, $\lambda_{\mu_0 - \varepsilon} > 0$ pro $\varepsilon > 0$, tedy podmínka (84)

je splněna. Vlastní čísla $-\frac{\varepsilon}{\mu_0}$ operátoru $I - (\mu_0 + \varepsilon)A$ mají stejnou násobnost jako charakteristické číslo μ_0 operátoru A . Speciálně věty 1.6 a 1.7 plynou z věty 2.10.

Důkaz věty 2.8 Položme $H = W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$, $O = (0, \infty) \times H$. Ověříme, že předpoklady věty 2.10 jsou splněny pro $\mu_0 = L_0^2$ a operátory ze (79) s $\mu = L^2$. Spojitost a kompaktnost operátorů A, N_j se ověří stejně jako v předchozí kapitole, matice $D(d_0/\mu)$, $B(d_0/\mu)$ závisí spojitě na $\mu \in (0, +\infty)$ a proto operátory T, N jsou spojitě a kompaktní. Pro ověření (83) (které je složitější než v dimenzi 1 uvažované v poznámce 12) viz např. [?]. Řešení rovnice $W - T_{\mu_0}W = 0$ jsou řešení úlohy (59) s $\lambda = 0$ a podle věty 2.4 jsou jimi právě všechny násobky dvojic funkcí $W_0 = \{[e_n, \frac{d_1^0 \mu_0^{-1} \kappa_n - b_{11}}{b_{12}} e_n]\}$, tedy tvoří jednodimenzionální prostor. Speciálně $\lambda = 0$ je geometricky prosté vlastní číslo operátoru $I - T_{\mu_0}$. Pro důkaz jeho (algebraické) prostoty zbývá dokázat, že $\langle W_0, W_0^* \rangle \neq 0$ (viz pozn. 10), kde W_0^* je vlastní vektor adjungovaného operátoru $I - T_{\mu_0}^*$. Podobně jako větu 2.3 bychom dokázali, že $W_0^* = \{[e_n, \frac{d_1^0 \mu_0^{-1} \kappa_n - b_{11}}{b_{21}} e_n]\}$. Výpočtem pak s použitím toho, že $\frac{d^0}{L_0^2} \in C_n$ (tedy $H_{d_0/\mu_0}(\kappa_n) = 0$) dostaneme $\langle W_0, W_0^* \rangle = 1 + \frac{d_1^0 \mu_0^{-1} \kappa_n - b_{11}}{b_{12}} \frac{d_1^0 \mu_0^{-1} \kappa_n - b_{11}}{b_{21}} = 1 + \frac{d_1^0 \mu_0^{-1} \kappa_n - b_{11}}{d_2^0 \mu_0^{-1} \kappa_n - b_{22}} = \frac{(d_1^0 + d_2^0) \mu_0^{-1} \kappa_n - (b_{11} + b_{22})}{d_2^0 \mu_0^{-1} \kappa_n - b_{22}} > 0$ podle předpokladu (47).

Stejnou metodou jako při odvození (64) můžeme vyjádřit všechna vlastní čísla operátoru $I - D(d)^{-1}B(d)A$ v závislosti na d a zjistit, že n -té vlastní číslo λ_n je nulové právě na hyperbole C_n a je kladné resp. záporné pro d vpravo resp. vlevo od C_n . Z obrázku hyperbol plyne, že $\frac{d^0}{\mu_0 - \varepsilon}$ a $\frac{d^0}{\mu_0 + \varepsilon}$ leží na opačných stranách od C_n za předpokladu, že d_0 leží nad společnou tečnou hyperbol a $d^0/\mu_0 \in C_n$. Proto je splněno (84).

Buď nyní C_0 množina z tvrzení věty 2.10 a položme

$$S_0 = \{[L, W]; L = \mu^{1/2}, [\mu, W] \in C_0\}.$$

Snadno zjistíme, že tato množina má vlastnosti z tvrzení věty 2.8.

2.5 Konkrétní modely

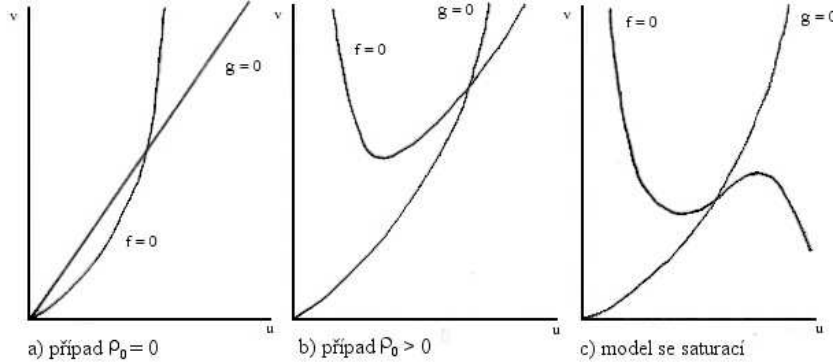
Giererův-Meinhardtův systém v nejjednodušší formě má tvar

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + \rho_0 - \mu u + c \frac{u^2}{v} \\ v_t &= d_2 \Delta v - \nu v + c' u^2, \end{aligned} \tag{85}$$

kde ρ_0, μ, c, ν, c' jsou kladné konstanty, speciálně ρ_0 resp. μ je konstantní zdroj resp. koeficient rozpadu aktivátoru u , ν je koeficient rozpadu inhibitoru v . (Případně může být i $\rho_0 = 0$).

Položíme-li $f(u, v) = \rho_0 - \mu u + c\frac{u^2}{v}$, $g(u, v) = -\nu v + c'u^2$, pak nulové izoklíny funkcí f, g (v rovině u, v) jsou grafy funkcí

$$v_f(u) = \frac{cu^2}{\mu u - \rho_0}, \quad v_g(u) = \frac{c'}{\nu}u^2.$$



Obr. 3 Nulové izoklíny pro Giererův-Meinhardtův model

Případ $\rho_0 > 0$. Zajímají nás pouze kladná u, v , speciálně na první izoklíně je $u > \frac{\rho_0}{\mu}$. Platí

$$\lim_{u \rightarrow \frac{\rho_0}{\mu}+} v_f(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} v_f(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} v_g(u) = +\infty, \quad v_g(0) = 0$$

a funkce v_f nabývá minima v $u = \frac{2\rho_0}{\mu}$. Graf obou funkcí (tedy tvar nulových izoklín) je na obr. 3b a jejich průsečík

$$\bar{U} = [\bar{u}, \bar{v}] = \left[\frac{1}{\mu} \left(\rho_0 + \frac{c\nu}{c'} \right), \frac{1}{\mu^2} (c'\rho_0 + c\nu)^2 \right]$$

je jediným prostorově homogenním stacionárním řešením systému (85) s Neumannovými okrajovými podmínkami (5). Je $f(u, v) < 0$ resp. $f(u, v) > 0$ pro u, v nad resp. pod izoklínou funkce f , podobně $g(u, v) < 0$ resp. $g(u, v) > 0$ pro u, v nad resp. pod izoklínou funkce g . Odtud plyne, že pokud jsou parametry ρ_0, c, ν, c', ν' takové, že $\bar{u} > \frac{2\rho_0}{\mu}$, tj. $\frac{c\nu}{c'} > \rho_0$, tedy izoklíny se protínají v bodě, kde obě funkce rostou, pak $\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}) > 0$, $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v}) < 0$, $\frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}) > 0$, $\frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v}) < 0$. Tedy $B = F'(\bar{U})$ je typu $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$, tj. jedná se o systém typu aktivátor-inhibitor. (Pro parametry takové, že $\bar{u} < \frac{2\rho_0}{\mu}$ je B typu $\begin{pmatrix} - & - \\ + & - \end{pmatrix}$, tedy nejde o případ uvažovaný v souvislosti s Turingovou myšlenkou.)

Máme $f(u, v_f(u)) = 0$, $g(u, v_g(u)) = 0$, tedy

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v_f(u)) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v_f(u)) \cdot \frac{dv_f(u)}{du} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v_g(u)) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v_g(u)) \cdot \frac{dv_g(u)}{du} = 0.$$

Odtud

$$\frac{dv_f}{du}(u) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u, v_f(u))}{\frac{\partial f}{\partial v}(u, v_f(u))}, \quad \frac{dv_g}{du}(u) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial u}(u, v_g(u))}{\frac{\partial g}{\partial v}(u, v_g(u))}.$$

Z obrázku plyne (za předpokladu $\bar{u} > \frac{2\rho_0}{\mu}$), že $\frac{dv_f}{du}(\bar{u}) < \frac{dv_g}{du}(\bar{u})$, tedy

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v})}{\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v})} < -\frac{\frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v})}{\frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v})}, \quad \text{tj. } \det F'(\bar{U}) > 0.$$

Podmínku $\text{tr } F'(\bar{U}) < 0$ je ovšem nutno ověřit výpočtem.

Případ $\rho_0 = 0$. Podmínka $B = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$ vyjde automaticky vždy, protože $v_f(u) = \frac{c}{\mu}u$ je teď lineární funkce a v průsečíku $[\bar{u}, \bar{v}]$ obě funkce v_f i v_g rostou. Stejně jako v případě $\rho_0 > 0$ dostaneme i $\det F'(\bar{U}) > 0$, neboť $v'_g(\bar{u}) > v'_f(\bar{u})$ (obr. 3a). Výpočtem dostaneme postupně $\bar{u} = \frac{c\nu}{c'\mu}$, $\bar{v} = \frac{c^2\nu}{c'\mu^2}$,

$$\text{tr } F'(\bar{U}) = \mu - \nu < 0 \text{ pro } \mu < \nu, \quad \det F'(\bar{U}) = \mu\nu > 0 \text{ vždy.}$$

Giererův-Meinhardtův systém se saturačním členem obsahuje v rovnici pro aktivátor člen popisující zpětnou vazbu zaručující, že pro vysoké koncentrace aktivátoru už jeho vliv na vlastní produkci příliš neroste:

$$\begin{aligned} u_t &= d_1\Delta u + \rho_0 - \mu u + c\frac{u^2}{v(1+ku^2)} \\ v_t &= d_2\Delta v - \nu v + c'u^2. \end{aligned} \quad (86)$$

Izokliny příslušných funkcí f, g mají teď tvar z obr. 3c,

$$\begin{aligned} v_f(u) &= \frac{cu^2}{(\mu u - \rho)(1 + ku^2)}, \\ v_g(u) &= \frac{c'}{\nu}u^2. \end{aligned}$$

Mají vždy jediný průsečík $\bar{U} = [\bar{u}, \bar{v}]$, ale matice $B = F'(\bar{U})$ má tvar $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$ pouze pro parametry, pro něž nastává situace z obr. 3b, tj. když v \bar{u} obě funkce $v_f(u), v_g(u)$ rostou. V tom případě je též $v'_g(\bar{u}) > v'_f(\bar{u})$ a odtud dostaneme $\det F'(\bar{U}) > 0$ stejně jako dříve.

Nekonstantní zdroj. Pro modelování regeneračních schopností nezmaru použili Gierer s Meinhardttem následující systém s nekonstantními koeficienty (viz [14]):

$$\begin{aligned} u_t &= d_1\Delta u + \rho_0\rho - \mu u + \frac{c\rho u^2}{v} \\ v_t &= d_2\Delta v - \nu v + c'\rho' u^2, \end{aligned}$$

kde ρ a ρ' jsou nyní kladné funkce prostorové proměnné, které se příliš od konstantních funkcí neliší. Speciálně člen $\rho_0\rho$ zde popisuje zdroj aktivátoru závisící

na prostorové proměnné. Závislostí koeficientů na prostoru je dána polarita (viz [14]). Model ovšem nezapadá do teorie popsané v předchozích sekcích, neexistuje vůbec stacionární prostorově konstantní řešení.

Thomasův model (1975) odpovídá skutečné reakci kyseliny močové s kyslíkem a má tvar

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + a - u - \frac{\rho uv}{1 + u + ku^2} \\ v_t &= d_2 \Delta v + \alpha(b - v) - \frac{\rho uv}{1 + u + ku^2}. \end{aligned}$$

V závislosti na parametrech má tento systém doplněný Neumannovými okrajovými podmínkami 1 – 3 stacionární prostorově konstantní řešení, která jsou průsečíky nulových izoklín funkcí $f(u, v) = a - u - \frac{\rho uv}{1 + u + ku^2}$, $g(u, v) = \alpha(b - v) - \frac{\rho uv}{1 + u + ku^2}$. Příklady kvalitativně odlišných situací jsou na obr. 4a,b. Zmíněné izokliny jsou grafy funkcí

$$v_f(u) = \frac{(a - u)(1 + u + ku^2)}{\rho u}, \quad v_g(u) = \alpha b \frac{1 + u + ku^2}{\rho u + \alpha(1 + u + ku^2)}.$$

Vždy platí

$$v_f(a) = 0, \quad v_f(u) > 0 \text{ pro } u \in (0, a), \quad v_f(u) < 0 \text{ pro } u > a,$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} v_f(u) = -\infty, \quad v_f \lim_{u \rightarrow 0^+} v_f(u) = +\infty,$$

v_f má vždy jedno lokální minimum a jedno lokální maximum, která se nabývají v bodech závislých na parametrech (obr. 4). Vždy je

$$v_g(0) = \lim_{u \rightarrow +\infty} v_g(u) = b$$

a v_g nabývá v jediném bodě (opět závislém na parametrech) svého minima. Máme $f(u, v) < 0$ nad nulovou izoklinou f , $f(u, v) > 0$ pod izoklinou a podobně $g(u, v) < 0$ nad izoklinou g , $g(u, v) > 0$ pod izoklinou, tedy funkce f, g rostou při překračování svých izoklín shora dolů. Tedy lze očekávat, že matice $B = F'(\bar{u})$ je v případě (a) z obr. 4 typu $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$. (Naší úvahou nelze vyloučit, že některý prvek matice je nulový, to je nutno ověřit výpočtem). Dále je z obrázku $\frac{dv_g}{du}(\bar{u}) > \frac{dv_f}{du}(\bar{u})$,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}) + \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \frac{dv_f}{du}(\bar{u}) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}) + \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{dv_g}{du}(\bar{u}) = 0$$

tedy pro libovolné parametry, pro něž izokliny mají tvar z obr. 4a je

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v})}{\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v})} < -\frac{\frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v})}{\frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v})}, \text{ tj. } \det B > 0.$$

Podmínku $\text{tr } B < 0$ ovšem z obrázku nevyčteme, pro konkrétní parametry ji musíme ověřit výpočtem.

V případě (b) na obr. 4 máme 3 stacionární prostorově homogenní stavy. Ze znamének f a g pod a nad příslušnou izoklínou dostaneme

$$F'(S_1) = \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}, F'(S_3) = \begin{pmatrix} - & - \\ + & - \end{pmatrix}, F'(S_2) = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}.$$

Tedy z hlediska Turingova efektu by mohl být zajímavý pouze stav S_2 . Ale analogickou úvahou jako v případě (a) teď dostaneme $\det F'(S_2) < 0$, neboť izoklína f nyní roste v S_2 rychleji než izoklína g (opačná situace než v případě (a)).

Obr. 4 a) jediné stacionární řešení splňující naše předpoklady,

b) tři stacionární řešení, naše předpoklady nesplňuje žádné z nich

Lengyel-Epsteinův model (1991) vznikl na základě skutečné laboratorní chemické reakce a má tvar

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + a - u - \frac{4uv}{1+u^2} \\ v_t &= d_2 \Delta v + b(u - \frac{uv}{1+u^2}). \end{aligned} \tag{87}$$

Literatura

- [1] M. Kučera: Diferenciální rovnice v biologii I.
- [2] P. Drábek: *Introduction to bifurcation theory*. Západočeská univerzita. Plzeň.
- [3] P. Drábek, J. Milota: *Methods of Nonlinear Analysis. Applications to Differential Equations*. Birkhäuser 2007.
- [4] J. D. Murray: *Mathematical Biology*. Springer-Verlag 1989, 1993.
- [5] J. D. Murray: *Mathematical Biology II. Spatial Models and Biomedical Applications*. Springer-Verlag 2003. 1989, 1993.
- [6] L. Edelstein-Keshet: *Mathematical Models in Biology*. Birkhäuser Mathematics Series, McGraw-Hill 1988.
- [7] R. S. Cantrell, C. Cosner: *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*. John Willey & Sons 2003.
- [8] N. F. Britton: *Reaction-Diffusion Equations and their Applications to Biology*. Academic Press 1986.
- [9] D. S. Jones, B. D. Sleeman: *Differential Equations in Biology*. Chapman&Hall/CRC 2003.
- [10] S. A. Levin, T.G. Hallam, L.J. Gross (Eds.): *Applied Mathematical Ecology*. Biomathematics Texts Vol 18, Springer-Verlag 1989.
- [11] P. De Kepper, J. Boissonade, and I. R. Epstein, *J. Phys. Chem.* 94, 6525, 1990.
- [12] J. Smoller: *Shock Waves and Reaction Diffusion Equations*. New York: Springer 1983.
- [13] A. M. Turing: The chemical basis of morphogenesis. *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. B* (1952), 37 – 72.
- [14] A. Gierer, H. Meinhardt: A theory of biological pattern formation. *Kybernetik* 12 (1972), 30-39.
- [15] P. H. Rabinowitz: Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *J. Funct. Anal.* 7 (1971) 487–513.
- [16] E. N. Dancer: On the structure of solutions of nonlinear eigenvalue problems. *Indiana Univ. Math. J.*, 23 (1974), 1069–1076.
Czechoslovak Math. J. 47 (122) (1997), 469–486.